Errata (30 octobre 2017)

Voici une liste de coquilles et précisions correspondant au livre **Maths MPSI** par Roger Mansuy, Vuibert 2013. Merci aux lecteurs qui ont signalé ces erreurs. N'hésitez pas à signaler d'autres erreurs ou imprécisions à l'adresse électronique

`roger.mansuy@gmail.com`

Chapitre 1

Il y a quelques coquilles dans la définition 1.18 dont voici une version corrigée.

Définition 1.18.

Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation binaire $\sim$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\sim$ est réflexive, c'est-à-dire, tout élément $x \in E$ est en relation avec lui-même pour $\sim$:

$$\forall x \in E, \qquad x \sim x.$$

- $\sim$ est symétrique, c'est-à-dire pour tous les éléments x et $y \in E$ tels que x est en relation avec y, on a aussi y en relation avec x

$$\forall x, y \in E, \qquad x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad y \sim x.$$

- $\sim$ est transitive, c'est-à-dire pour tous les éléments x, y et $z \in E$ tels que x est en relation avec y et y est en relation avec z, on a aussi x en relation avec z

$$\forall x, y, z \in E, \qquad x \sim y \text{ et } y \sim z \qquad \Rightarrow \qquad x \sim z.$$

Deux éléments en relation sont dits équivalents. La classe d'équivalence d'un élément x pour la relation $\sim$ est l'ensemble des éléments de E équivalents à x pour $\sim$, à savoir

$$\{y \in E,\ y \sim x\}.$$

Chapitre 2

Un i est malencontreusement oublié dans la proposition 2.27.

Proposition 2.27.

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Les solutions de $z^n = a$ sont les complexes $|a|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

En d'autres termes, pour obtenir les racines n-ièmes de a, on commence par en trouver une z_0 et on déduit toutes les autres en multipliant z_0 par une racine n-ième de l'unité.

> **Démonstration**
> Notons $z' = \frac{z}{|a|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg(a)}{n}}}$. Alors $z^n = a(z')^n$ donc z est solution de $z^n = a$ si, et seulement si, z' est une racine n-ième de l'unité.

Il y a une erreur de signe dans la deuxième question de l'exercice 19.

●●● Exercice 19 (25 min.)

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$|a-b|^2 \le (1+|a|^2)(1+|b|^2).$$
2. Montrer qu'il y a égalité si, et seulement si, $a = re^{i\theta}$ et $b = -\frac{1}{r}e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$.

Voici une version rectifiée du corrigé.

1. Par inégalité triangulaire, $|a-b| \le |a|+|b|$ donc
$$|a-b|^2 \le |a|^2+|b|^2+2|ab|.$$
Il reste à voir que l'inégalité arithmético-géométrique donne $2|ab| \le |ab|^2+1$ pour conclure.
2. Il suffit d'avoir l'égalité dans les deux majorations utilisées ci-dessus donc $|ab| = 1$ d'une part et a et $-b$ de même argument modulo 2π.

Chapitre 6

Il y a une erreur d'indice dans l'exemple page 202 (dernier cas). Voici une version corrigée.

> **Exemple**
> Considérons une suite $(u_n)_n$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
> - Si $f(x) \ge x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_n$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \ge u_n$.
> - Si $f(x) \le x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
> - Si f est croissante et $u_1 \ge u_0$ (respectivement $u_1 \le u_0$), la suite $(u_n)_n$ est croissante (respectivement décroissante) : en effet, on montre rapidement que $u_{n+1} \ge u_n$ par récurrence sur n.
> - Si f est décroissante et $u_2 \ge u_0$ (respectivement $u_2 \le u_0$), les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont croissante et décroissante (respectivement décroissante et croissante).

Chapitre 18

Il y a une erreur de calcul dans le second exemple page 620 dont voici une version corrigée.

Exemple

Trouvons $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & a & d \\ 2 & b & e \end{pmatrix}$ soit orthogonale. Remarquons tout d'abord que le premier vecteur colonne est bien de norme 1. Pour que le second vecteur colonne forme avec le premier une famille orthonormée, il faut que

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & + & a & + & 2b & = & 0 \\ 1 & + & a^2 & + & b^2 & = & 6 \end{array} \right.$$

ce qui entraîne $b = \frac{-2\pm 2\sqrt{6}}{5}$ et donc $a = \frac{-1\mp 4\sqrt{6}}{5}$. Afin de trouver le dernier vecteur colonne, il suffit de considérer le produit vectoriel (ou son opposé) des deux premiers vecteurs colonnes. Les calculs sont laissés au lecteur.

Chapitre 19

Une coquille s'est glissée dans l'exemple consacré aux inégalités de Kolmogorov. En effet, il est écrit que

$$|f'(a)| \le M_2 \frac{|x-a|}{2} + M_0 \frac{2}{|x-a|} \le 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

La majoration de la fonction de x au membre de droite par son minimum est fausse. Voici une version corrigée :

Exemple (inégalité de Kolmogorov)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f est bornée par M_0 et f'' est bornée par M_2. Alors f' est bornée, plus précisément, on a

$$\forall x \in I, \qquad |f'(x)| \le 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

En effet, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et x nous donne

$$|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| \le M_2 \frac{|x-a|^2}{2}.$$

Or $|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| \ge |(x-a)f'(a)| - |f(x) - f(a)|$ par inégalité triangulaire. Donc

$$|f'(a)| \le M_2 \frac{|x-a|}{2} + M_0 \frac{2}{|x-a|}.$$

En étudiant les variations de $x \mapsto M_2 \frac{|x-a|}{2} + M_0 \frac{2}{|x-a|}$, on obtient que le minimum de cette fonction est $2\sqrt{M_0 M_2}$. Par conséquent, en choisissant la valeur de x réalisant ce minimum,

$$|f'(a)| \le 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Dans l'exercice 1 page 669, il est abusif de parler de primitive pour la fonction f (puisque celle-ci ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires donc ne saurait être la dérivée d'une fonction). Il convient de remplacer la consigne « Calculer $F(n)$ où $n \in \mathbb{N}$ et F est l'unique primitive de f nulle en 0. » par « Calculer $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$. »

Chapitre 22

Le corrigé de l'exercice 17 est apparu confus à certains. Rappelons l'énoncé.

●●● Exercice 17 urne de Polya (20 min.)

On considère une urne contenant a boules colorées et b boules blanches. Après chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur. Déterminer la probabilité que la n-ième boule tirée soit blanche.

Voici une version améliorée du corrigé.

Notons B_n l'événement « la n-ième boule tirée est blanche » et $p_n = \mathbb{P}(B_n)$. Montrons par récurrence que $p_n = \frac{b}{a+b}$.

▹ On a immédiatement $p_1 = \frac{b}{a+b}$.

▹ Calculons p_2 avec la formule des probabilités totales :

$$p_2 = \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{b+c}{a+b+c}p_1 + \frac{b}{a+b+c}(1-p_1) = \frac{b}{a+b}.$$

▹ Soit $n \geq 2$ tel que $p_k = \frac{b}{a+b}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Considérons les événements A_k « exactement k boules blanches ont été tirées dans les $n-1$ premiers tirages » et exprimons p_n avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_n = \mathbb{P}(B_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_n|A_k)\mathbb{P}(A_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+(n-1)c}\mathbb{P}(A_k) \\ &= \frac{1}{a+b+(n-1)c}\sum_{k=0}^{n-1}(b+kc)\mathbb{P}(A_k). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $p_n = \frac{b}{a+b}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(b+kc)\mathbb{P}(A_k) = \frac{b(a+b+(n-1)c)}{a+b}.$$

Exploitons cette relation en calculant p_{n+1} avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n \cap A_k)\mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_{n+1} | \overline{B_n} \cap A_k)\mathbb{P}(\overline{B_n} \cap A_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+(k+1)c}{a+b+nc}\mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+nc}\mathbb{P}(\overline{B_n} \cap A_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c}{a+b+nc}\mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+nc}\big(\mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap A_k)\big) \\
&= \frac{c}{a+b+nc}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+nc}\mathbb{P}(A_k) \\
&= \frac{c}{a+b+nc}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{a+b+nc}\sum_{k=0}^{n-1} (b+kc)\mathbb{P}(A_k) \\
&= \frac{c}{a+b+nc}\,\frac{b}{a+b} + \frac{1}{a+b+nc}\,\frac{b(a+b+(n-1)c)}{a+b} = \frac{b}{a+b}.
\end{aligned}$$

En conclusion, la probabilité de tirer une boule blanche ne dépend pas du numéro du tirage effectué.

Chapitre 23

Il y a une hypothèse de positivité oubliée dans les énoncés des inégalités de Markov (mais bien utilisée dans les démonstrations). Voici les énoncés corrects.

Proposition 23.11. inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(X) \geq a\mathbb{P}(X \geq a).$$

Corollaire 23.12.

Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Proposition 23.15. inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ croissante. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que ⋯

$f(a) > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(a)}.$$

Il y a une hypothèse de notation dans la remarque page 771. Dans le terme de gauche de la première égalité, une virgule est apparu au milieu du produit.

Remarque

On trouve avec cette expression que $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0$. De manière plus générale, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne pour toutes variables réelles X et Y, $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$. En effet,

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \quad = \quad \ldots$$

La conclusion du corrigé de l'exercice 10 est fausse. Rappelons l'énoncé.

●●● Exercice 10 (15 min.)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ indépendante de $(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable $S_N = X_1 + \ldots + X_N$.

[...]

Après calculs, on obtient en utilisant l'indépendance :

$$\mathbb{E}(S_N^2) = \sum_{k=0}^{n} (k\mathrm{V}(X_1) + k^2\mathbb{E}(X_1)^2)\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E}(N)\mathrm{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2\mathbb{E}(N^2).$$

En conclusion, $\mathrm{V}(S_N) = \mathbb{E}(N)\mathrm{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2\mathrm{V}(N)$.