Errata (20 septembre 2015)

Voici une liste de coquilles correspondant au livre **Algèbre linéaire** par Roger Mansuy et Rached Mneimné, Vuibert 2012. Ce correctif n'engage pas Rached Mneimné. Merci aux lecteurs qui ont signalé ces erreurs. N'hésitez pas à signaler d'autres erreurs ou imprécisions à l'adresse électronique

`roger.mansuy@gmail.com`

Chapitre IV – Lemme des noyaux

La correction du l'inclusion $\supset$ de l'exercice 5.1 est erronnée

5.1. Exercice. *Soit deux polynômes P et Q de* PGCD *D et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que* $\ker P(f) + \ker Q(f) = \ker M(f)$, *où M est le* PPCM *des deux polynômes P et Q.*

▷ *Éléments de correction.* ▷ Comme P divise M, $\ker P(f) \subset \ker M(f)$. De même, $\ker Q(f) \subset \ker M(f)$ et par conséquent

$$\ker P(f) + \ker Q(f) \subset \ker M(f).$$

▷ Notons $P = D\widetilde{P}$, $Q = D\widetilde{Q}$ et remarquons que $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ sont premiers entre eux. D'après la propriété de Bézout, il existe U et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U\widetilde{P} + V\widetilde{Q} = 1.$$

Alors, pour tout $x \in \ker M(f)$, on a la décomposition

$$x = U(f) \circ \widetilde{P}(f)(x) + V(f) \circ \widetilde{Q}(f)(x).$$

Enfin,

$$Q(f)(U(f) \circ \widetilde{P}(f)(x)) = U(f) \circ M(f)(x) = 0_E,$$
$$P(f)(V(f) \circ \widetilde{Q}(f)(x)) = V(f) \circ M(f)(x) = 0_E.$$

Ainsi, $x \in \ker P(f) + \ker Q(f)$. $\triangleleft$

Chapitre IX – Trigonalisation

Dans la démonstration du théorème de Kronecker avec les matrices compagnons, il manque un argument.

Démonstration. [...]
$\triangleright$ Soit P un polynôme à coefficients entiers dont les racines complexes de P sont de module inférieur ou égal à 1 et soit z une racine de P. Rappelons que z est une valeur propre de C_P, car $P = \chi_{C_P}$ et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, z^k est une valeur propre de C_P^k c'est-à-dire une racine de $\chi_{C_P^k}$.

Par ailleurs, quitte à trigonaliser C_P, on réalise que toute valeur propre de C_P^k est la puissance k-ième d'une valeur propre de C_P. Les matrices C_P donc C_P^k sont à coefficients entiers donc les polynômes caractéristiques de ces matrices également. Ainsi, $z^k \in \mathcal{R}$.

[...] $\square$

Chapitre X – Réduction de Jordan

Dans la démonstration de l'unicité de la décomposition de Jordan-Dunford (proposition 1.1. du chapitre X), on peut simplifier l'argument en s'épargnant le recours aux sous-espaces caractéristiques.

Démonstration. [...]
$\triangleright$ Montrons maintenant l'unicité de cette décomposition.

Soit (d, n) le couple construit précédemment et $(\tilde{d}, \tilde{n})$ un couple satisfaisant aux conditions de la proposition. Comme $\tilde{d}$ et $\tilde{n}$ commutent, ils commutent également avec $f = \widetilde{n} + \widetilde{d}$ et donc avec les polynômes en f que sont d et n. Ainsi,

- $n - \widetilde{n}$ est nilpotent comme somme d'endomorphismes nilpotents qui commutent ;
- $d - \widetilde{d}$ est diagonalisable comme somme d'endomorphismes diagonalisables qui commutent

En conclusion, $d - \widetilde{d} = \widetilde{n} - n$ est nilpotent est diagonalisable donc est l'endomorphisme nul : $d = \tilde{d}$ et $n = \tilde{n}$. $\square$

Chapitre XI – Réduction de Frobenius

La arguments établissant l'unicité de la famille des invariants de similitude (proposition 1.1. du chapitre XI) ne sont pas clairs.

Démonstration. [...]
▹ Montrons désormais l'unicité de la suite de polynômes de cette proposition en supposant qu'il existe deux telles suites distinctes de polynômes unitaires P_1, P_2, ..., P_r et Q_1, Q_2, ..., Q_s et notons

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i = \bigoplus_{i=1}^{s} F_i$$

des décompositions associées.

Remarquons que par construction $P_1 = Q_1 = \mu_f$. Comme par ailleurs

$$\sum_{i=1}^{r} \deg P_i = \sum_{i=1}^{s} \deg Q_i,$$

il existe $j \in [\![2, \min(r,s)]\!]$ minimal tel que $P_j \neq Q_j$.

Étudions l'endomorphisme $P_j(f)$. Pour tout $i \geqslant j$, P_j est un multiple de P_i donc $P_j(f_{E_i})$ est l'endomorphisme nul. Ainsi,

$$P_j(f)(E) = \bigoplus_{i=1}^{r} P_j(f)(E_i) = \bigoplus_{i=1}^{r} P_j(f_{E_i})(E_i) = \bigoplus_{i=1}^{j-1} P_j(f)(E_i).$$

Or,

$$P_j(f)(E) = \bigoplus_{i=1}^{s} P_j(f)(F_i)$$

d'où

$$\bigoplus_{i=1}^{j-1} P_j(f)(E_i) = \bigoplus_{i=1}^{s} P_j(f)(F_i).$$

soit encore en considérant les dimensions

$$\sum_{i=1}^{j-1} \dim P_j(f)(E_i) = \sum_{i=1}^{s} \dim P_j(f)(F_i).$$

Par définition de j, $P_i = Q_i$ pour tout $i < j$ donc les endormorphismes induits f_{E_i} et f_{F_i} sont semblables. Ainsi,

$$\dim P_j(f)(E_i) = \operatorname{rg} P_j(f_{E_i}) = \operatorname{rg} P_j(f_{F_i}) = \dim P_j(f)(F_i).$$

En remplaçant dans l'égalité ci-dessus, on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{j-1} \dim P_j(f)(F_i) = \sum_{i=1}^{s} \dim P_j(f)(F_i).$$

Combinant ces résultats, on obtient que $\dim P_j(f)(F_j) = 0$ donc $P_j(f_{F_j})$ est l'endomorphisme nul : $Q_j = \mu_{f_{F_j}}$ divise P_j. Par symétrie, P_j divise Q_j et donc $Q_j = P_j$: contradiction. $\square$