

# Cahier d'exercices

PSI\*\* 20/21

Si vous détectez une erreur d'énoncé, merci d'avertir vos camarades, de la signaler en classe ou à l'adresse

[✉ roger.mansuy@gmail.com](mailto:roger.mansuy@gmail.com)

Voici quelques consignes génériques.

- ▶ Avant d'aborder un exercice, on vérifie que l'on est au point sur le cours : les énoncés avec l'ensemble de leurs hypothèses, les méthodes pour établir les différentes propriétés.
- ▶ Avant de quitter un exercice, on dresse un bilan de nos tentatives (fructueuses ou non) afin de gagner en expérience pour les prochains exercices.
- ▶ La signalétique de difficulté (☹, ☹☹ ou ☹☹☹) est purement indicative. Merci de ne pas indexer votre stratégie de travail sur celle-ci.

Roger MANSUY

# 1 – Révisions d'algèbre linéaire

## Noyau, image

### Exercice 1.1 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  un sous-espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u^{-1}(u(F)) = F + \text{Ker } u$ .

### Exercice 1.2 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u(F) \subset u(G)$  si, et seulement si,  $F + \text{Ker } u \subset G + \text{Ker } u$ .

### Exercice 1.3 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda \neq \mu$  des scalaires. Montrer que les sous-espaces  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^2$  et  $\text{Ker}(u - \mu \text{Id})^2$  sont en somme directe.

## Calcul et utilisation de la dimension

### Exercice 1.4 (☞☞)

Considérons trois bases  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $(f_1, \dots, f_n)$ , et  $(g_1, \dots, g_n)$  de  $\mathbf{R}^n$ . Fixons  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i + j \leq n + 1$  et posons  $E = \text{Vect}(e_i, \dots, e_n)$ ,  $F = \text{Vect}(f_j, \dots, f_n)$  et  $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_{i+j-1})$ . Montrer que  $E \cap F \cap G$  n'est pas le sous-espace nul.

### Exercice 1.5 (☞)

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $A = \{P \in \mathbf{R}_n[X], \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) = 0\}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}_n[X]$ . Préciser sa dimension.
2. Déterminer  $A \cap \text{Vect}(1, (X-1)^p)$  pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
3. En déduire une base de  $A$ .

### Exercice 1.6 (☞☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $F_1, F_2$  deux sous-espaces vectoriels. À quelle condition existe-t-il  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Ker } u = F_1$  et  $\text{Im } u = F_2$  ?

### Exercice 1.7 (☞☞)

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  non nul. Montrer que l'ensemble des matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telles que la famille  $(AX, X)$  est liée est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  ; préciser sa dimension.

### Exercice 1.8 (☞)

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Déterminer  $\dim\{v \in \mathcal{L}(E, F), v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E, F)}\}$ .

### Exercice 1.9 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  un sous-espace de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\dim u(F) \geq \dim F - \dim \text{Ker } u$ .

### Exercice 1.10 (☞☞)

Soit  $V_1, \dots, V_p$  des sous-espaces d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie tels que  $\sum_{k=1}^p \dim V_k > (p-1) \dim E$ .

1. Montrer que l'application

$$u: \begin{cases} V_1 \times \dots \times V_p & \rightarrow & E^{p-1} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{p-1} - x_p) \end{cases}$$

n'est pas injective.

2. En déduire que l'intersection  $\bigcap_{k=1}^p V_k$  n'est pas le sous-espace nul.

### Exercice 1.11 (☞)

Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ . Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes

- $a_0 \neq 0$ ,
- $\forall Q \in \mathbf{C}_n[X], \exists P \in \mathbf{C}_n[X], Q = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$ .

### Exercice 1.12 (☞)

Déterminer les  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$  tels que  $u: P \mapsto \sum_{k=0}^n a_k P(X+k)$  soit un automorphisme de  $\mathbf{C}[X]$ .

### Exercice 1.13 (☞☞)

Soit  $P \in \mathbf{R}[X]$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q \in \mathbf{R}[X]$  tel que  $Q(0) = 0$  et  $P = Q(X) - Q(X-1)$ .

### Exercice 1.14 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que, pour tout  $x \in E$ , il existe  $n \in \mathbf{N}$  vérifiant  $u^n(x) = 0_E$ . Montrer que  $u$  est nilpotent.

### Exercice 1.15 (☞☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n > 0$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $E$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Phi: u \mapsto (u(e_1), \dots, u(e_n))$  soit un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E)$  et  $E^n$ .

## Hyperplans, formes linéaires

### Exercice 1.16 (☞☞)

Soit  $H_1, \dots, H_p$  des hyperplans d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

1. Montrer que  $\dim \bigcap_{k=1}^p H_k \geq n - p$ .
2. Peut-on avoir une inégalité stricte pour des hyperplans deux à deux distincts?

### Exercice 1.17 (☞☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$ . Montrer que  $F$  est l'intersection de  $n - p$  hyperplans.

### Exercice 1.18 (☞)

Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que  $\varphi: M \mapsto \text{tr}(AM)$ .

### Exercice 1.19 (☞)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Discuter la dimension du sous-espace  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \text{tr}(M) = \text{tr}(AM) = 0\}$ .

### Exercice 1.20 (☹☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\text{Ker } \varphi$  est stable par  $u$  si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\varphi \circ u = \lambda \varphi$ .

### Exercice 1.21 (☹☹☹)

Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,  $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ . Montrer que  $\varphi$  est colinéaire à  $\text{tr}$ .

## Projecteurs

### Exercice 1.22 (☹)

Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs de même image  $F$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $\lambda p + (1 - \lambda)q$  est un projecteur d'image  $F$ .

### Exercice 1.23 (☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$  qui commutent. Montrer que  $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ .

### Exercice 1.24 (☹☹)

1. Déterminer les droites vectorielles stables par un projecteur.
2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension impaire,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ . Montrer qu'il existe une droite à la fois stable par  $p$  et  $q$ .

### Exercice 1.25 (☹☹☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  des sous-espaces de  $\mathcal{L}(E)$  tels que  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{U} + \mathcal{V}$  tels que

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{V}, \quad u \circ v = -v \circ u.$$

Considérons des endomorphismes  $p \in \mathcal{U}$  et  $q \in \mathcal{V}$  tels que  $\text{Id} = p + q$ .

1. Montrer que  $p$  et  $q$  sont des projecteurs.
2. Justifier que  $\dim \mathcal{V} \leq (n - \text{rg } p)^2$  puis  $\dim \mathcal{U} \leq (\text{rg } p)^2$ .
3. En déduire les sous-espaces  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ .

### Exercice 1.26 (☹☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que, pour tout projecteur  $p$  de  $E$ ,  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ .  
Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $m$  un entier non nul tel que  $u^m = \text{Id}_E$ .
2. Montrer que l'endomorphisme  $p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$  est un projecteur de  $E$ .
3. En déduire que  $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \text{tr}(u^k) = \dim \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ .

## Calcul matriciel

### Exercice 1.27 (☹)

Montrer que toute matrice peut s'écrire comme somme de deux matrices inversibles.

**Exercice 1.28** (☞)

Calculer l'inverse de la matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1.29** (☞☞)

Soit  $A$  une matrice inversible telle que  $A + A^{-1} = 2I_n$ . Calculer, pour tout  $k$ ,  $A^k + A^{-k}$ .

**Exercice 1.30** (☞☞)

Soit  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux.

1. Montrer que, pour tout  $k \leq n$ ,  $\text{rg}(A_1 \cdots A_k) \leq n - k$ .
2. Calculer le produit  $A_1 \cdots A_n$ .

**Exercice 1.31** (☞☞)

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \alpha_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

et  $\mathcal{C}_A$  le sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  formés des matrices commutant avec  $A$ .

1. Montrer l'injectivité de l'application linéaire

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{C}_A & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ (m_{i,j})_{i,j} & \mapsto (m_{i,n})_i \end{cases}$$

2. En déduire que, pour tout  $M \in \mathcal{C}_A$ , il existe  $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$  tel que  $M = P(A)$ .

**Exercice 1.32** (☞☞)

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telles qu'il existe  $P \in \mathbf{R}[X]$  vérifiant  $P(0) \neq 0$  et  $AB = P(A)$ . Montrer que  $AB = BA$ .

## Similitude

### Exercice 1.33 (☞)

Exhiber une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de rang 1 qui n'est pas semblable à  $E_{1,1}$ .

### Exercice 1.34 (☞)

Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 1.35 (☞☞)

Montrer qu'une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$  nilpotente est semblable à l'une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 1.36 (☞☞)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de rang  $k$  telle que  $A^2 = 0_n$ . Montrer que  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 1.37 (☞☞)

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $d \in \mathbf{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $u^2 = -\text{Id}$ .

1. Calculer  $(\det u)^2$ . Que peut-on en déduire sur la valeur de  $d$  ?
2. Donner un tel endomorphisme  $u$  en dimension  $d = 2$ .
3. Montrer que, pour  $d = 2$ , les matrices associées aux endomorphismes  $u$  sont semblables à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Généraliser le résultat en dimension  $d$  quelconque.

### Exercice 1.38 (☞☞)

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $d$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $u^2 + u + \text{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Soit  $x \in E$  non nul. Montrer que  $(x, u(x))$  est une famille libre.
2. Soit  $x, y \in E$  tel que la famille  $(x, u(x), y, u(y))$  est libre. Montrer que la famille  $(x, u(x), y, u(y))$  est libre.

3. Supposons  $\dim E = 4$ . Montrer que toute matrice de  $u$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 1.39 (☹☹☹)

1. Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$  des complexes deux à deux distincts et  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Déterminer le noyau puis l'image de l'endomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \mapsto AM - MA \end{cases}$$

2. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  une matrice de trace nulle.

- Montrer que  $M$  est semblable à une matrice à diagonale nulle.
- Montrer qu'il existe  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telles que  $M = AB - BA$ .

## Déterminants

### Exercice 1.40 (☹)

Soit  $n < m$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$ . Calculer  $\det(AB)$ .

### Exercice 1.41 (☹)

Déterminer selon les valeurs de  $a \in \mathbf{C}$  le rang de la matrice  $M_a = I_n + aJ$  où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 1.42 (☹☹)

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ ,  $c \neq 1$  et

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c & \cdots & c & x_n \end{pmatrix}.$$

- Montrer que l'application  $x \mapsto \det(A + xJ)$  est polynomiale de degré au plus 1.
- En déduire  $\det A$ .

**Exercice 1.43** (☹☹☹)

Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$  de degré  $n$  et  $a_0, \dots, a_n$  des complexes deux à deux distincts.

1. Justifier que  $(P, P', \dots, P^{(n)})$  est une base de  $\mathbf{C}_n[X]$ .
2. Montrer que  $(P(X + a_0), P(X + a_1), \dots, P(X + a_n))$  est une base de  $\mathbf{C}_n[X]$ .  
Indication : on pourra se ramener au déterminant de Vandermonde.

**Exercice 1.44** (☹☹)

Soit  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

1. Décomposer la matrice

$$P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$$

comme produit de deux matrices, la seconde étant diagonale par blocs.

2. En déduire  $\det(P)$ .

**Exercice 1.45** (☹)

Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

**Exercice 1.46** (☹☹☹)

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Rappeler que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
3. Soit  $U$  l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients complexes et  $\varphi$  l'application de  $U$  dans  $U$  définie par

$$\prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \mapsto \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k^2).$$

Déduire des questions précédentes que, pour tout  $P \in U$  à coefficients entiers,  $\varphi(P)$  est également à coefficients entiers.

**Exercice 1.47** (☹☹)

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer qu'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  non nul tel que la famille  $(AX, BX)$  soit liée.



## 2 – Réduction des endomorphismes

### Diagonalisabilité de (petites) matrices

#### Exercice 2.1 (☞)

Déterminer parmi les matrices suivantes celles qui sont diagonalisables (avec un minimum de calculs)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 2.2 (☞)

Soit  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . Étudier la diagonalisabilité et préciser les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha + \beta & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 2.3 (☞)

Étudier la diagonalisabilité des matrices de la forme  $\alpha I_3 + \beta A$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 2.4 (☞)

Déterminer les  $\alpha \in \mathbf{C}$  pour lesquels la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

#### Exercice 2.5 (☞☞)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires  $a, b, c$  et  $d$  pour la diagonalisabilité de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

Indication : on pourra montrer que les sous-espaces propres de cette matrice sont de dimension 1.

**Exercice 2.6** (☞☞)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires  $a, b, c, d, e$  et  $f$  pour la diagonalisabilité de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.7** (☞☞)

Déterminer les  $a \in \mathbf{R}$  pour lesquels la matrice

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

**Exercice 2.8** (☞)

Étudier la diagonalisabilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.9** (☞☞)

Soit  $c \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ . Étudier la diagonalisabilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & c & c \\ 1 & 1 & c & c \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.10** (☞)

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable. Trigonaliser  $A$ .
2. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  telle que  $M^2 = A$ . Montrer que les valeurs propres de  $M$  appartiennent à  $\{-1, 0, 1\}$ .
3. Résoudre l'équation  $M^2 = A$ .

**Exercice 2.11** (☞☞)

Notons, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$A(t) = \begin{pmatrix} -t & -1 & t \\ -1 & 1-t & 1 \\ t & -1 & -t \end{pmatrix}.$$

Trouver la plus petite valeur de  $t$  telle que  $A(t)$  ne soit pas diagonalisable puis trigonaliser la matrice correspondante.

### Exercice 2.12 (☹☹)

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Étudier la diagonalisabilité de la matrice  $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i, n+1-i}$ .

### Exercice 2.13 (☹)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que si, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \lambda$ , alors  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .
2. Montrer que si, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \lambda$ , alors  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .

### Exercice 2.14 (☹)

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  triangulaire supérieure. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices  $A$  et  $A^2$  soient semblables.

## Diagonalisabilité de matrices par blocs

### Exercice 2.15 (☹)

Déterminer les éléments propres des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

### Exercice 2.16 (☹☹)

Soit  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Diagonaliser  $J$ .
2. En déduire une diagonalisation de la matrice

$$\begin{pmatrix} J & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

### Exercice 2.17 (☹☹)

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ . Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , exprimer  $P(M)$  en fonction de  $P(A)$ ,  $P'(A)$  et  $B$ .
2. Montrer que  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable et  $B = 0_n$ .

### Exercice 2.18 (☹)

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la matrice

$$\begin{pmatrix} aI_n & I_n \\ 0_n & bI_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

soit diagonalisable.

### Exercice 2.19 (☞☞)

Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telles que  $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$  et  $\text{Sp}(B) = \{\mu\}$  et  $\lambda \neq \mu$  puis

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit diagonalisable.

### Exercice 2.20 (☞☞)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$$

est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de  $A$ .

### Exercice 2.21 (☞☞)

Soit  $\alpha \in \mathbf{C}$  et  $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  non nul. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & C^\top \\ C & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{C}).$$

1. Déterminer  $\text{rg}(A)$ . En déduire que  $X^{n-1}$  divise le polynôme caractéristique  $\chi_A$ .
2. Montrer que  $\chi_A = X^{n-1}(X^2 - \alpha X - \beta)$  avec  $\beta$  une constante que l'on exprimera à partir de  $C$ .
3. Supposons  $\beta = 0$ . Montrer que la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.
4. Supposons  $\beta \neq 0$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable.

## Diagonalisabilité d'endomorphismes

### Exercice 2.22 (☞)

Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme  $u$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  défini par  $u : M \mapsto M^\top$ .

### Exercice 2.23 (☞)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  non nulle. Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  définis par

1.  $u : M \mapsto \text{tr}(AM)I_n$  |
2.  $u : M \mapsto \text{tr}(A)M + \text{tr}(M)A$  |
3.  $u : M \mapsto M + \text{tr}(M)I_n$

### Exercice 2.24 (☞☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $s$  une symétrie vectorielle. Considérons l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{L}(E)$  défini par  $\varphi : u \mapsto \frac{1}{2}(s \circ u + u \circ s)$ .

1. Calculer  $\varphi^k$  pour  $k \leq 3$  et en déduire un polynôme annulateur de  $\varphi$ .
2. L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable?

### Exercice 2.25 (☞)

Soit  $a \in \mathbf{R}$ . Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$  défini par  $u : P \mapsto (X - a)P'$ .

### Exercice 2.26 (☞)

Soit  $u$  un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$ .

### Exercice 2.27 (☞☞)

Soit  $E$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2$  est diagonalisable. Montrer que  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$ .

Indication : on pourra établir que, pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}^*$ ,  $\text{Ker}(u^2 - \lambda^2 \text{Id}) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \lambda \text{Id})$ .

### Exercice 2.28 (☞☞)

Soit  $E$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace de  $E$  possède un supplémentaire stable par  $u$ .

### Exercice 2.29 (☞☞)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Notons  $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$  la matrice extraite  $(a_{i,j})_{i,j \leq n-1}$ . Montrer que si  $A$  admet une valeur propre de multiplicité au moins 2, alors  $A$  et  $B$  admettent une valeur propre commune.

### Exercice 2.30 (☞☞☞)

Soit  $E$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme tel que, pour tout  $x \in E$ , il existe  $\lambda_x, \mu_x \in \mathbf{C}$  vérifiant  $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$ . Montrer que  $u$  admet au plus deux valeurs propres.

## Réduction simultanée

### Exercice 2.31 (☞)

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telles que  $AB = 0_n$ . Montrer que  $A$  et  $B$  admettent un vecteur propre commun.

### Exercice 2.32 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $u$  et  $v$  des endomorphismes de  $E$  diagonalisables qui commutent. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation commune à  $u$  et  $v$ .

### Exercice 2.33 (☞☞)

Soit  $E$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\alpha \in \mathbf{C}^*$  et  $u$  et  $v$  deux endomorphismes vérifiant  $uv - vu = \alpha u$ . Montrer que  $u$  et  $v$  admettent un vecteur propre commun.

### Exercice 2.34 (☞☞)

Soit  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

- Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes
  - les matrices  $A$  et  $B$  admettent une valeur propre commune
  - il existe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  non nulle vérifiant  $AM = MB$
  - la matrice  $\chi_A(B)$  n'est pas inversible
- Supposons  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$ . Montrer que, pour toute matrice  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , il existe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que  $AM - MB = C$ .

### Exercice 2.35 (☹☹)

Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,  $A, B \in E$  et les endomorphismes de  $E$ ,  $u : M \mapsto AM$  et  $v : M \mapsto MB$ .

1. Montrer que  $u$  est un automorphisme si, et seulement si,  $A$  est inversible.
2. Montrer que  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable.
3. Supposons  $A, B$  diagonalisables.
  - (a) Montrer que l'application  $M \mapsto AMB$  est diagonalisable. Que dire de la réciproque?
  - (b) Montrer que l'application  $M \mapsto AM - MB$  est diagonalisable.

## Polynômes en une matrice/ un endomorphisme

### Exercice 2.36 (☹)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Déterminer les polynômes  $P \in \mathbf{C}[X]$  tels que  $P(A) \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ .

### Exercice 2.37 (☹☹)

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel,  $p \in \mathbf{N}^*$  puis  $u, v_1, \dots, v_p$  des endomorphismes non nuls de  $E$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}^*$  deux à deux distincts tels que

$$\forall n \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket, \quad u^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n v_i.$$

1. Montrer que, pour tout polynôme  $P \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$  tel que  $P(0) = 0$ ,

$$P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) v_i.$$

2. Montrer que  $\text{Sp}(u) \subset \{0, \lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ .
3. Montrer que  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \subset \text{Sp}(u)$ .

### Exercice 2.38 (☹)

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  telle que  $\{-1, 1\} \subset \text{Sp}(A)$  et  $A^4 = A^2$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.

### Exercice 2.39 (☹)

Trouver toutes les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telles que  $A^5 = A^2$  et  $\text{tr } A = n$ .

### Exercice 2.40 (☹☹)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer que 1 est la seule valeur propre de  $A$  si, et seulement si, pour tout  $k > 0$ ,  $\text{tr}(A^k) = n$ .

### Exercice 2.41 (☹☹)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que  $A^3 = A + I_n$ . Montrer que  $\det A > 0$ .

### Exercice 2.42 (☹☹☹)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  diagonalisable et  $B = A^3 + A + I_n$ . Montrer que  $A$  est un polynôme en  $B$ .  
Indication : on pourra penser à l'interpolation de Lagrange.

**Exercice 2.43** (☹☹☹)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  et  $P \in \mathbf{C}[X]$  tels que la matrice  $P(A)$  est diagonalisable et la matrice  $P'(A)$  est inversible. Montrer que  $A$  est diagonalisable.

## Localisation de valeurs propres

**Exercice 2.44** (☹☹)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ .

1. Montrer que  $A$  est inversible.
2. Soit  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $B$ . Montrer qu'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|b_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |b_{i,j}|$ .

**Exercice 2.45** (☹☹☹)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} > 0$  et tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

1. Montrer que  $1 \in Sp(A)$  puis que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
2. Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$  une valeur propre de  $A$  distincte de 1. Montrer que  $|\lambda| < 1$ .

# 3 – Révisions d'analyse

## Convergence de suites

### Exercice 3.1 (☹☹)

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que  $u_n + v_n \rightarrow 0$  et  $u_n^2 + v_n^2 \rightarrow 0$ . Montrer que  $u_n \rightarrow 0$  et  $v_n \rightarrow 0$ .

### Exercice 3.2 (☹☹)

Montrer qu'il n'existe pas de suite  $(u_n)$  strictement positive telle que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}.$$

Indication : on pourra établir qu'une telle suite serait convergente de limite strictement positive.

### Exercice 3.3 (☹☹)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $u_n^2 \rightarrow 1$  et  $|u_{n+1} - u_n| < 1$  pour tout  $n$ . Montrer que  $(u_n)$  converge.

### Exercice 3.4 (☹)

Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ .

### Exercice 3.5 (☹)

Soit  $(u_n)$  une suite de limite  $\ell \in \mathbf{C}$ . Étudier la convergence de la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k$ .

### Exercice 3.6 (☹☹☹)

Soit  $(u_n)$  une suite complexe vérifiant  $u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite en fonction de  $u_0$ .

### Exercice 3.7 (☹)

Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$ . Montrer que  $u_n \rightarrow 0$ , puis déterminer la limite de la suite  $(n u_n)$ .

### Exercice 3.8 (☹☹)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in [-1, 1]$ , et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$ .

1. Justifier qu'il existe  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $u_0 = \cos(\alpha\pi)$ .
2. Déterminer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $\alpha$ .
3. Déterminer les valeurs possibles pour la limite de  $(u_n)$ .
4. Montrer que si la suite  $(u_n)$  converge, alors elle est stationnaire ; préciser les valeurs correspondantes pour  $u_0$ .

### Exercice 3.9 (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  une fonction continue décroissante et  $(\lambda_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  une suite strictement décroissante de limite 1. Posons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n = \lambda_n f$ .

1. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe  $\ell$ , puis que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n$  admet un unique point fixe  $\ell_n$ .
2. Étudier la convergence de la suite  $(\ell_n)$ .



### Exercice 3.10 (☹☹☹)

Soit  $(u_n)$  une suite telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = n(u_n - n)$ . Montrer que  $u_n = O(n)$  si, et seulement si,  $u_1 = 2e$ .  
Indication : on admet que  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rightarrow e$ .

### Exercice 3.11 (☹☹☹)

Soit  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $\alpha + \beta < 1$  et  $(u_n)$  une suite positive vérifiant, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+3} \leq \alpha u_{n+2} + \beta u_n$ . Montrer que  $u_n \rightarrow 0$ .  
Indication : on pourra poser  $v_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$  puis montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

## Fonctions réelles

### Exercice 3.12 (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue et  $(u_n)$  une suite vérifiant  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$ . Supposons la suite  $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k)$  bornée. Montrer que  $f$  admet un point fixe.  
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

### Exercice 3.13 (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue et  $f^* : x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$ .  
1. Supposons que  $f(x) \rightarrow \ell \in \mathbf{R}$  en  $+\infty$ . Montrer que  $f^*(x) \rightarrow \ell$  en  $+\infty$ .  
2. Supposons que  $f(x) = ax + b + o(1)$  en  $+\infty$ . Déterminer un développement asymptotique de  $f^*$  en  $+\infty$  à la même précision.

### Exercice 3.14 (☹)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{C}^*$  dérivable. Montrer que  $t \mapsto |f(t)|$  est croissante si, et seulement si,  $\Re e\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) \geq 0$  pour tout  $t \in I$ .

### Exercice 3.15 (☹☹☹)

Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $f \leq g$ . Supposons qu'il existe  $a \in \mathbf{R}$  tel que  $f(a) = g(a)$ . Montrer que les tangentes aux courbes représentatives de  $f$  et  $g$  au point d'abscisse  $a$  sont égales.

### Exercice 3.16 (☹)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable, nulle en  $a$  et  $b$  et  $x \notin [a, b]$ . Montrer qu'il passe par le point  $(x, 0)$  au moins une tangente à la courbe représentative de  $f$ .

### Exercice 3.17 (☹☹)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  et  $a < b \in I$ .

1. Définissons l'application  $\varphi$  définie par  $\varphi(x)$

$$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!} (b-x)^{n+1}$$

où  $A$  est une constante choisie de sorte à ce que  $\varphi(a) = 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ .

2. En déduire qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

## Analyse asymptotique

### Exercice 3.18 (☹☹)

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $f_n : x \mapsto x^{3n} - 3nx + 1$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n$  admet une unique racine dans  $]1, 2[$ . On note  $x_n$  cette racine.
2. Justifier que  $(x_n)_n$  converge vers 1.
3. Trouver  $a$  tel que  $x_n = 1 + a \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ .
4. Trouver  $b$  tel que  $x_n = 1 + a \frac{\ln n}{n} + b \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

### Exercice 3.19 (☹☹)

1. Montrer que, pour  $n$  assez grand, l'équation  $e^x = x^n$  admet deux solutions distinctes dans  $\mathbf{R}_+^*$ , notées  $u_n < v_n$ .
2. Montrer que  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$  que l'on précisera puis déterminer un équivalent de  $u_n - \ell$ .
3. Déterminer la limite de  $(v_n)$  puis donner un équivalent de  $v_n$ .
4. Donner un développement asymptotique de  $v_n$ .

### Exercice 3.20 (☹)

Déterminer les  $\alpha > 0$  tels que  $\exp((x+1)^\alpha) \underset{+\infty}{\sim} \exp(x^\alpha)$ .

### Exercice 3.21 (☹)

Montrer que  $\arccos(x) \underset{1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$ .

### Exercice 3.22 (☹☹)

Montrer que  $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$  réalise une bijection de  $[e, +\infty[$  dans  $[e, +\infty[$  puis déterminer un équivalent de  $f^{-1}(x)$  en  $+\infty$ .

### Exercice 3.23 (☹☹☹)

Déterminer les fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  continues telles que  $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$  pour tous  $x, y \in \mathbf{R}$  et  $\ln f(x) \sim \alpha x^2$  en  $+\infty$  pour un  $\alpha > 0$ .

# 4 – Séries numériques

## Convergence de série

### Exercice 4.1 (☞)

Déterminer la nature de la série de terme général

1.  $n^{-1-\frac{1}{n}}$

2.  $3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1)$

3.  $\ln \frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$

4.  $e^{-(\ln n)^\alpha}$  pour  $\alpha > 0$

5.  $\sqrt{\ln(2n+3)} - \sqrt{\ln(2n)}$

### Exercice 4.2 (☞)

Déterminer, selon les valeurs de  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , la nature de la série de terme général  $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$ .

### Exercice 4.3 (☞)

Soit  $\alpha > 0$ . Montrer que la série de terme général  $\alpha^{H_n}$  converge si, et seulement si,  $\alpha < e^{-1}$ .

### Exercice 4.4 (☞☞)

Déterminer la nature des séries dont le terme général est

1.  $(\cos \frac{1}{n})^{n^\alpha}$  pour  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

2.  $(n \sin \frac{1}{n})^{n^\alpha}$  pour  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

3.  $(n \sin \frac{1}{n})^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}}$

### Exercice 4.5 (☞☞)

Déterminer la nature de la série de terme général  $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ .

Indication : on pourra considérer le réel  $2 - \sqrt{3}$  et étudier  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ .

### Exercice 4.6 (☞)

Déterminer selon la valeur de la constante  $a > 0$  la nature de la série de terme général  $\frac{n^2}{a^n}$ .

### Exercice 4.7 (☞)

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{u_n e^{-u_n}}{n^2}$ .

### Exercice 4.8 (☞☞)

Soit  $(u_n)$  la suite définie, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_{3n+1} = \frac{2}{\ln(n+1)}$ ,  $u_{3n+2} = u_{3n+3} = \frac{-1}{\ln(n+1)}$ . Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge puis que pour tout entier  $k \geq 2$ , la série de terme général  $u_n^k$  diverge.

### Exercice 4.9 (☞☞)

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante positive. Montrer que les séries de terme général  $u_n$  et  $2^n u_{2^n}$  sont de même nature.

### Exercice 4.10 (☞☞)

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante positive. Montrer que les séries de terme général  $u_n$  et  $nu_{n^2}$  sont de même nature.

### Exercice 4.11 (☹☹)

Établir la convergence d'une série de terme général  $u_n$  positif vérifiant

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

### Exercice 4.12 (☹☹☹)

Notons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = (-1)^n \frac{\sin \ln n}{n}$ . Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .

Indication : on pourra considérer  $u_{n+1} + u_n$ .

### Exercice 4.13 (☹☹☹)

Considérons la suite  $(a_n)$  telle que  $a_n$  est le nombre de diviseurs positifs de  $n$ .

1. Notons  $n = \prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k}$  la décomposition en facteurs premiers de  $n$ . Calculer l'expression de  $a_n$ .

Fixons  $\varepsilon \in ]0, 1]$ .

2. Justifier que, pour tout  $k$  tel que  $p_k \geq 2^\varepsilon$ ,  $\frac{\alpha_k + 1}{p_k^{\varepsilon \alpha_k}} \leq 1$ .

3. Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x+1}{2^{\varepsilon x}}$  sur  $\mathbf{R}_+$ .

4. En déduire qu'il existe  $C$  (qui dépend de  $\varepsilon$ ) tel que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n \leq Cn^\varepsilon$ .

5. Conclure que la série de terme général  $\frac{a_n}{n^s}$  converge pour tout  $s > 1$ .

## Calculs de sommes

### Exercice 4.14 (☹)

Soit  $p \geq 1$  un entier. Posons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{1-p}{n}$  si  $p$  divise  $n$ ,  $\frac{1}{n}$  sinon. Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge et calculer sa somme.

### Exercice 4.15 (☹☹)

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $H_n$  la somme partielle de la série harmonique. Montrer que la série de terme général  $\frac{H_n}{n(n+1)(n+2)}$  est convergente; calculer sa somme.

### Exercice 4.16 (☹☹)

1. Soit  $p \in \mathbf{N}^*$  et  $(u_n)$  une suite de limite nulle. Posons, pour tout  $n$ ,  $v_n = \sum_{k=0}^{p-1} u_{np+k}$ . Montrer que les séries de terme général  $u_n$  et  $v_n$  sont de même nature et, dans le cas convergent, de même somme.

2. Montrer que la série de terme général  $\frac{j^n}{n+1}$  est convergente et calculer sa somme.

## Comparaison série/intégrale

### Exercice 4.17 (☹)

Déterminer la nature de la série de terme général

1.  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

2.  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

3.  $\frac{1}{\sum_{k=1}^n (\ln k)^2}$

### Exercice 4.18 (☞)

1. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{\ln n}{n}$ .  
Notons  $S_n$  sa  $n$ -ième somme partielle.
2. Montrer que  $S_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$ .
3. Montrer qu'il existe  $c \in \mathbf{R}$  tel que  $S_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1)$ .

### Exercice 4.19 (☞☞)

Soit  $\alpha > 1$ . Notons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

1. Montrer que  $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ .
2. Étudier la convergence de la série de terme général  $\frac{R_n}{S_n}$ .

### Exercice 4.20 (☞☞)

Soit  $(u_n)_n$  une suite positive de limite nulle telle que la série de terme général  $u_n$  est divergente; notons  $S_n$  la  $n$ -ième somme partielle de cette série.

1. Montrer que la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n}$  diverge.  
Indication : on pourra commencer par étudier la série de terme général  $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$  ou la série de terme général  $\frac{u_n}{S_{n-1}}$ .
2. Montrer que, pour tout  $\alpha > 0$ , la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n^{1+\alpha}}$  converge.

### Exercice 4.21 (☞☞)

Soit  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ .

1. Montrer que si  $\ell < 0$ , alors la série de terme général  $f(n)$  converge.
2. Montrer que si  $\ell > 0$ , alors la série de terme général  $f(n)$  diverge.
3. Exhiber des fonctions  $f$  vérifiant  $\ell = 0$  et pour lesquelles la nature de la série de terme général  $f(n)$  diffère.

## Calcul asymptotique

### Exercice 4.22 (☞)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n^2)$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers une valeur que l'on précisera.
2. Pour une valeur de  $\alpha$  bien choisie, montrer que la suite  $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$  converge vers une limite non nulle.
3. Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 4.23 (☞☞)

Soit  $a, b \in \mathbf{R}_+^*$  et  $(u_n)_n$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n > 0$ .  
Posons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n = \ln(n^{b-a} u_n)$ .
2. Étudier la convergence de la série de terme général  $v_{n+1} - v_n$ .
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général  $u_n$  converge.

### Exercice 4.24 (☹☹)

Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$  et  $(u_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}}$  telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

1. Montrer qu'il existe  $C \in \mathbf{R}$  tel que  $u_n \sim \frac{C}{n(\ln n)^\alpha}$ .
2. En déduire la nature de la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 4.25 (☹☹)

Soit  $(u_n)_n$  une suite telle que  $u_{n+1} = o(u_n)$ .

1. Justifier que la série de terme général  $u_n$  converge.
2. Montrer que  $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim u_n$ .

### Exercice 4.26 (☹☹☹)

Considérons une série convergente de terme général  $u_n > 0$ . Montrer que  $\sum_{k=0}^n k u_k = o(n)$ .

Indication : on pourra introduire  $R_n$ , le reste partiel de la série de terme général  $u_n$ .

## Séries alternées

### Exercice 4.27 (☹)

Déterminer la nature de la série de terme général

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $\frac{(-1)^n}{n - \ln n}$                  | 3. $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n}$          | 5. $\frac{(-1)^n}{H_n + (-1)^n}$             |
| 2. $\frac{(-1)^n}{n + \frac{(-1)^n n}{\ln n}}$ | 4. $\ln \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ | 6. $(-1)^n \sin \frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ |

### Exercice 4.28 (☹)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \cos(u_n)$ . Étudier la convergence des séries de terme général  $(-1)^n u_n$ ,  $\ln \cos(u_n)$  et  $u_n$ .

## Produits infinis

### Exercice 4.29 (☹)

Déterminer les  $\alpha \in \mathbf{R}$  tels que la suite  $(x_n)$  définie, pour  $n \geq 1$ , par  $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right)$  est convergente.

### Exercice 4.30 (☹)

Montrer que la suite  $(x_n)$  définie, pour  $n \geq 1$ , par  $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$  est convergente.

### Exercice 4.31 (☹☹)

Considérons la suite  $(p_n)$  définie, pour  $n \geq 1$ , par  $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ .

1. Montrer que  $p_n \rightarrow 0$ .
2. En déduire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $p_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$ .

**Exercice 4.32** (☞☞)

Soit  $(a_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}}$ . Posons, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $p_n = \prod_{k=0}^n a_k$ . On dit que le produit (infini) de terme général  $a_n$  converge si la suite  $(p_n)$  converge dans  $\mathbf{R}_+^*$ .

1. Montrer que, si le produit converge, alors  $a_n \rightarrow 1$ .  
On note, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = a_n - 1$ .
2. Montrer que le produit de terme général  $a_n$  converge si, et seulement si, la série de terme général  $\ln(1 + u_n)$  converge.
3. Supposons dans cette question que  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que le produit de terme général  $a_n$  converge si, et seulement si, la série de terme général  $u_n$  converge.
4. Supposons dans cette question que la série de terme général  $u_n$  converge. Montrer que la série de terme général  $\ln(1 + u_n)$  converge si, et seulement si, la série de terme général  $u_n^2$  converge.

**Exercice 4.33** (☞☞)

Soit  $(a_n)$  une suite de réels strictement positifs. Posons  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = a_1$  et pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n = a_n u_{n-1} + u_{n-2}$  puis, pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n-1}}$ .

1. Supposons que la série de terme général  $a_n$  converge.
  - (a) Montrer que, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ .
  - (b) En déduire la nature de la série de terme général  $v_n$ .
2. Supposons que la série de terme général  $a_n$  diverge. En étudiant la série de terme général  $u_{n-1}(u_n - u_{n-2})$  déterminer la nature de la série de terme général  $v_n$ .

# 5 – Intégration

## Intégration sur un segment

### Exercice 5.1 (☞)

Déterminer les primitives de la fonction  $x \mapsto x \arctan(x)^2$ .

### Exercice 5.2 (☞)

Soit  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  continue telle que  $\int_0^1 f(t+n) dt \rightarrow \ell \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $\int_0^1 f(nt) dt \rightarrow \ell$ .

### Exercice 5.3 (☞☞)

Posons, pour tout  $x \in \mathbf{R}$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$  et tout  $n$ ,  $2D_n(x) \sin \frac{1}{2}x = \sin(n + \frac{1}{2})x$ .
2. Montrer que, pour tout  $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\int_0^\pi \varphi(t) \sin \lambda t dt \rightarrow 0$  quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ .
3. Exprimer  $\int_0^\pi t D_n(t) dt$  comme une somme puis retrouver la valeur  $\zeta(2)$ .

### Exercice 5.4 (☞)

Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite  $(I_n)$  où  $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$ .

### Exercice 5.5 (☞☞)

1. Déterminer l'unique solution  $\alpha$  de l'équation  $\operatorname{sh} x = 1$ . Posons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $I_n = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n dt$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ ,  $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$ .
3. En déduire un équivalent de  $I_n$ .

Indication : on pourra commencer par établir la monotonie de la suite  $(I_n)$ .

### Exercice 5.6 (☞☞☞)

Notons, pour tout polynôme  $P \in \mathbf{C}[X]$  non constant et qui n'admet pas de racine de module 1,

$$M(P) = \int_0^{2\pi} \ln |P(e^{it})| dt.$$

1. Justifier la définition de  $M(P)$  pour un polynôme  $P \in \mathbf{C}[X]$  non constant et qui n'admet pas de racine de module 1.
2. Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$  non constant et qui n'admet pas de racine de module 1. Montrer qu'il existe un réel  $A$ , des complexes  $z_1, \dots, z_n \notin \mathbf{U}$  tels que

$$M(P) = A + \sum_{k=1}^n M(X - z_k).$$

3. Soit  $r \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ . Montrer que l'application  $\theta \mapsto M(X - re^{i\theta})$  est constante.
4. Montrer que, pour tout  $r \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ ,  $M(X - r) = \max(0, 2\pi \ln r)$ .

Indication : on pourra utiliser les sommes des rectangles pour calculer l'intégrale  $M(X - r)$ .



### Exercice 5.7 (👉👉👉)

Soit  $F$  l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  telles que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

1. Montrer que, pour tout  $n > 0$ , il existe un unique polynôme  $P_n$  de degré 2 vérifiant  $P_n(0) = 0$ ,  $P_n(\frac{1}{n}) = 1$  et  $P_n'(\frac{1}{n}) = 0$ .  
Définissons, pour tout  $n > 0$ , une fonction  $f_n$  sur  $[0, 1]$  par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x > \frac{1}{n}, \\ P_n(x)e^{x-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout  $n > 0$ ,  $f_n \in F$ .
3. Montrer que  $\int_0^1 |f_n'(t) - f_n(t)| dt \rightarrow e^{-1}$ .
4. Montrer que, pour tout  $f \in F$ ,  $\int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt \geq e^{-1}$ .

## Intégrales fonction des bornes

### Exercice 5.8 (👉👉)

Définissons une fonction sur  $\mathcal{D} = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  par  $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ . Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 5.9 (👉)

Déterminer un équivalent en 0 de  $x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$ .

### Exercice 5.10 (👉)

Montrer que  $\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} (\ln x)^2$ .

### Exercice 5.11 (👉👉👉)

Soit  $f : [0, a] \rightarrow \mathbf{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  nulle en 0. Montrer que  $\int_0^a |f'(t)f(t)| dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt$ .  
Indication : on pourra introduire la fonction  $F : x \mapsto \int_0^x |f'(t)| dt$ .

## Intégrabilité

### Exercice 5.12 (👉)

Déterminer parmi les fonctions suivantes celles qui sont intégrables sur  $\mathbf{R}_+^*$  :

1.  $x \mapsto \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$

2.  $x \mapsto \frac{1}{(e^x-1)(e^{-x}+1)}$

3.  $x \mapsto \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

### Exercice 5.13 (👉)

Déterminer les  $\alpha \in \mathbf{R}$  tels que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})$  soit intégrable sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

### Exercice 5.14 (👉)

Montrer que la fonction  $x \mapsto \ln \frac{1+x^2}{x^2}$  est intégrable sur  $\mathbf{R}_+^*$  et calculer son intégrale.

**Exercice 5.15** (☹)

Étudier l'intégrabilité sur  $] -1, +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{x^2}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$ .

**Exercice 5.16** (☹)

Déterminer les  $\alpha \in \mathbf{R}$  telle que la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

**Exercice 5.17** (☹☹)

Montrer que la fonction  $x \mapsto \sqrt{\tan x}$  est intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

**Exercice 5.18** (☹☹)

Étudier l'intégrabilité sur  $] \frac{2}{\pi}, +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \ln \cos \frac{1}{x}$ .

**Exercice 5.19** (☹☹)

Soit  $\alpha \in [0, 1[$  et  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  continue par morceaux telle que  $\frac{f(x+1)}{f(x)} \rightarrow \alpha$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbf{R}_+$ .

**Exercice 5.20** (☹☹)

- Justifier l'existence des intégrales  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$ , et  $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$ .
- Montrer que  $I = J$ .
- Calculer la valeur de  $I + J$  à l'aide du changement de variables  $u = t - \frac{1}{t}$ . En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 5.21** (☹☹)

- Justifier, pour tout  $n > 0$ , l'existence des intégrales  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^n)} dt$  et  $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)} dt$ .
- Montrer que, pour tout  $n > 0$ ,  $I_n = J_n$  puis calculer cette valeur commune.

**Exercice 5.22** (☹)

- Montrer l'existence des intégrales  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$  et la fonction  $J : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\alpha^2+t^2} dt$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .
- Montrer que  $I = 0$ , puis déterminer  $J$ .

**Exercice 5.23** (☹☹)

- Soit  $a > -1$ . Montrer, en posant  $x = \tan t$ , que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a \sin^2(t)} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$ .
- Étudier en fonction de  $\alpha > 0$  la convergence de la série de terme général  $\int_0^\pi \frac{1}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} dt$ .
- En déduire en fonction de  $\alpha > 0$  l'intégrabilité sur  $\mathbf{R}_+$  de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^\alpha \sin^2(x)}$ .

**Exercice 5.24** (☹☹)

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ .

- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $I_{n+1} = (1 - \frac{1}{3n})I_n$ .
- Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbf{R}$  tels que  $\ln I_n = -\frac{1}{3} \ln n + \alpha + o(1)$ .
- En déduire que la série de terme général  $I_n$  diverge.

### Exercice 5.25 (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\int_n^{n+1} f(t) dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$ .
2. Supposons dorénavant  $f'$  intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Montrer que la série de terme général  $f(n)$  et l'intégrale de  $f$  sur  $[1, +\infty[$  sont de même nature.
3. Soit  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha} \cos \sqrt{n}$ .

## Intégrales convergentes

### Exercice 5.26 (☹☹)

Justifier que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \sin(t \ln t) dt$  converge.

### Exercice 5.27 (☹☹)

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \sin(t^2) dt$ .

1. Préciser le signe de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge mais ne converge pas absolument.

### Exercice 5.28 (☹☹)

Discuter selon les valeurs réelles de  $\alpha$  la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{it^\alpha} dt$ .

### Exercice 5.29 (☹☹)

Montrer que les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$  existent et sont égales.

### Exercice 5.30 (☹☹)

1. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est définie et continue sur  $\mathbf{R}_+^*$ .
2. Montrer la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

### Exercice 5.31 (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  continue de limite  $\ell$  en 0 et de limite  $\ell'$  en  $+\infty$ ,  $a, b > 0$ .

1. Montrer que  $\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \rightarrow \ell' \ln \frac{b}{a}$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . Énoncer un résultat analogue concernant la limite en 0.
2. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$  est convergente puis déterminer sa valeur.
3. Calculer les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ , et  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ .

# 6 – Suites et séries de fonctions

## Convergence de suites de fonctions

### Exercice 6.1 (👉)

Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie

1. sur  $\mathbf{R}$  par  $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$

2. sur  $\mathbf{R}_+^*$  par  $f_n : x \mapsto \frac{4-(\ln x)^{2n}}{1+(\ln x)^{2n}}$

3. sur  $\mathbf{R}$  par  $f_n : x \mapsto \frac{x}{|x| + \frac{1}{n}}$ .

4. sur  $[0, 1]$  par  $f_n : x \mapsto \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$

5. sur  $\mathbf{R}$  par  $f_n : x \mapsto nxe^{-x^2 \ln n}$

6. sur  $\mathbf{R}$  par  $f_n : x \mapsto \sin \frac{(n+1)x}{n}$

7. sur  $[-1, 1]$  par  $f_n : x \mapsto \sin(nxe^{-nx^2})$

8. sur  $\mathbf{R}_+$  par  $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+x+\dots+x^n}$

9. sur  $\mathbf{R}_+^*$  par  $f_n : x \mapsto \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$

10. sur  $\mathbf{R}_+^*$  par  $f_n : x \mapsto n(\sqrt[n]{x} - 1)$

11. sur  $\mathbf{R}$  par  $f_n : x \mapsto \cos^n x \sin^{2n} x$

12. sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par  $f_n : x \mapsto n \cos x \sin^n x$

13. sur  $]0, \pi[$  par  $f_n : x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{n \sin^2(x)}$

### Exercice 6.2 (👉)

Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f_n : x \mapsto \min(n, \frac{x^2}{n})$ .

### Exercice 6.3 (👉👉)

Considérons la suite de fonctions  $(f_n)$  définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $\mathbf{R}$ .

2. Justifier que chaque fonction  $f_n$  est dérivable.

3. Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f'_n)$  sur le segment  $[-1, 1]$ .

### Exercice 6.4 (👉👉)

Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie sur  $\mathbf{R}_+$  par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi\sqrt{n}}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Exercice 6.5 (👉👉)

Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f_n : x \mapsto \prod_{k=1}^n \sin(2^k x)$ .

Indication : pour la convergence uniforme, on pourra établir qu'il existe  $C \in [0, 1[$  tel que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $|\sin x \sin 2x| \leq C$ .

### Exercice 6.6 (👉👉👉)

Considérons la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n : x \mapsto 3^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$ .

1. Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$ .
2. Comparer la limite de la suite des intégrales de  $f_n$  et l'intégrale de la limite de cette suite.

### Exercice 6.7 (☹☹)

Soit  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et convergeant uniformément vers des fonctions  $f$  et  $g$ . Est-ce que la suite  $(\max(f_n, g_n))$  converge uniformément vers  $\max(f, g)$  ?

### Exercice 6.8 (☹☹)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions réelles qui convergent uniformément sur un intervalle  $I$ . Considérons la suite de fonctions  $(g_n)$  définie par, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$ . Montrer que la suite de fonctions  $(g_n)$  converge uniformément sur  $I$ .

### Exercice 6.9 (☹☹☹)

Étudier la convergence de la suite de fonctions définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f_0 : x \mapsto \sin x$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_{n+1} : x \mapsto \sin f_n(x)$ .

### Exercice 6.10 (☹☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue et  $2\pi$ -périodique. Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie sur  $\mathbf{R}$  par, pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \int_0^n f(x+t)f(t) dt$ .

### Exercice 6.11 (☹☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue, majorée. Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n : x \mapsto \sup\{f(t) - n|x - t|, t \in \mathbf{R}\}$ . Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$ .

## Autour du théorème de Weierstrass

### Exercice 6.12 (☹☹)

Soit  $d \in \mathbf{N}$  et  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales de degré au plus  $d$  qui converge simplement sur  $\mathbf{R}$  vers une fonction polynomiale  $P$ .

Dans cet exercice on pourra utiliser le résultat suivant d'interpolation : il existe des polynômes  $L_0, \dots, L_d \in \mathbf{R}_d[X]$  tels que, pour tout  $P \in \mathbf{R}_d[X]$ ,  $P = \sum_{k=0}^d P(k)L_k$ .

1. Montrer que  $P$  est de degré au plus  $d$ .
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment.

### Exercice 6.13 (☹☹☹)

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$P_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}.$$

1. Justifier que, pour tout  $n$ ,  $P_n$  est une fonction polynomiale ; préciser son degré.
2. Montrer que la suite de fonctions  $(P_n)$  converge uniformément sur  $[-1, 1] \setminus \{a\}$ ,  $a \in ]0, 1[$ .  
Notons, pour tout  $n$ ,  $Q_n$  la primitive de  $P_n$  nulle en 0.
3. Montrer que la suite de fonctions  $(Q_n)$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers une fonction que l'on précisera.

### Exercice 6.14 (☹☹☹)

Définissons une suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$  par  $f_0 : x \mapsto 0$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_{n+1} : x \mapsto f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x))^2$ . Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  vers  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ .

Indication : on pourra remarquer que la suite  $(f_n(x))_n$  est croissante et considérer l'écart à sa limite.

### Exercice 6.15 (☹☹)

Considérons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la fonction

$$\varphi_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n}(1-x^2)^n & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\alpha_n$  est un réel choisi de sorte à ce que  $\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(t) dt = 1$ .

1. Calculer  $\alpha_n$ .
2. Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(t) \mathbb{1}_{|t|>\varepsilon} dt \rightarrow 0$ .  
Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue et bornée. Posons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n : x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x-t)\varphi_n(t) dt$ .
3. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment.

## Séries de fonctions

### Exercice 6.16 (☹)

Étudier la convergence normale (selon l'intervalle considéré) de la série de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto \frac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}$ .

### Exercice 6.17 (☹)

Montrer que les séries de fonctions de terme général

$$1. f_n : x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \quad \left| \quad 2. g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

convergent uniformément sur  $\mathbf{R}_+$  mais pas normalement.

### Exercice 6.18 (☹)

Soit  $f$  la somme de la série de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto 3^{-n} \sin(3^n x)$ .

1. Justifier que  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .
2. Relier  $f(3x)$  et  $f(x)$ . En déduire que  $f$  n'est pas dérivable en 0.

### Exercice 6.19 (☹)

1. Déterminer le domaine de convergence de la série de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}$ .

Notons  $f$  la somme de cette série.

2. Montrer que  $f$  est dérivable.
3. Montrer que  $f$  est monotone.
4. Étudier  $f$  en  $+\infty$ .

### Exercice 6.20 (☹)

Soit  $f$  la somme de la série de fonctions de terme général, pour  $n \geq 1$ ,  $f_n : x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbf{R}$ .
2. Déterminer un équivalent en 0 de  $f$ .

### Exercice 6.21 (☹☹)

Considérons la somme  $f$  de la série de fonctions de terme général, pour  $n \geq 1$ ,  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ .

1. Préciser le domaine de définition de  $f$  puis montrer que  $f$  y est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
2. Montrer qu'il existe  $C \in \mathbf{R}$  tel que  $xf(x) - f(x+1) = C$  pour tout  $x$  dans le domaine de définition.
3. Donner des équivalents de  $f$  en  $+\infty$  et en 0.

### Exercice 6.22 (☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$  et, pour tout  $n > 0$ ,  $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. La série de fonctions définissant  $f$  converge-t-elle normalement sur  $\mathbf{R}_+^*$ ? sur tout segment de  $\mathbf{R}_+^*$ ?
3. Montrer, pour  $x > 0$  et  $n > 0$ , que  $0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ .
4. Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbf{R}_+$ .

### Exercice 6.23 (☹☹)

Soit  $f$  la somme de la série de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto \ln(1 + e^{-nx})$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est continue, strictement décroissante sur son domaine de définition.
3. Montrer que  $f$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.
4. Donner un équivalent de  $f$  en 0.

### Exercice 6.24 (☹☹)

Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Posons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n : x \mapsto n^\alpha xe^{-nx}$ . Notons  $S_\alpha$  la somme de la série associée.

1. Déterminer les  $\alpha$  tels que la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge normalement sur  $\mathbf{R}_+$ .
2. Montrer que  $S_\alpha$  est continue sur  $\mathbf{R}_+^*$  pour tout  $\alpha$ .
3. Montrer que  $S_1$  n'est pas continue en 0.
4. Montrer que, pour  $\alpha \in [0, 1[$ ,  $S_\alpha$  n'est pas continue en 0.

### Exercice 6.25 (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue et  $(f_n)$  la suite de fonctions définie par  $f_0 = f$  et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

Justifier que la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge et calculer sa somme.

### Exercice 6.26 (☹☹)

Soit  $f$  la somme de la série de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur son domaine de définition.
2. Déterminer un équivalent en 0 de  $f$ .

# 7 – Intégrales à paramètre

## Suites d'intégrales

### Exercice 7.1 (☹☹)

1. Justifier la convergence de  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

Posons, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$ .

2. Montrer que la suite  $(I_n)$  est constante et calculer  $I_0$ .

3. En déduire la valeur de  $I$ .

Indication : on pourra introduire la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$  convenablement prolongée en 0 de sorte à être de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

### Exercice 7.2 (☹)

Posons, pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t+t^{2n}}} dt$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie, qu'elle converge et calculer sa limite.

### Exercice 7.3 (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$  continue telle que la fonction  $x \mapsto f(x)e^{-x}$  soit intégrable sur  $\mathbf{R}_+$ . Étudier la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , par  $u_n = \int_0^n f(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ .

### Exercice 7.4 (☹)

Posons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n : x \mapsto \frac{n}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$ .

1. Justifier que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

2. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt$ .

### Exercice 7.5 (☹☹)

Montrer que la suite  $(n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt)$  converge vers  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ .

### Exercice 7.6 (☹☹)

Déterminer la limite de  $(u_n)$  définie par  $u_n = \int_0^n \cos^{n^2}\left(\frac{t}{n}\right) dt$ .

### Exercice 7.7 (☹)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue. Déterminer la limite de  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \geq 1$ , par  $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n) dt$ .

## Séries d'intégrales



### Exercice 7.8 (☞)

1. Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2n}(1-t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$ .
2. En déduire que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ .

### Exercice 7.9 (☞☞)

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$ . Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 7.10 (☞☞)

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\dots+t^n} dt$ .

1. Montrer que  $u_n \rightarrow 0$ .
2. Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 7.11 (☞☞)

On rappelle que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \rightarrow \gamma$ .

1. Justifier l'existence de l'intégrale  $I = \int_0^1 \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} \right) dt$ .
2. Montrer que  $I = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} \right) e^{-u} du$ .
3. Étudier la série de fonctions de terme général  $u_n : x \mapsto e^{-nx} \left( 1 - \frac{1}{x} (1 - e^{-x}) \right)$ .
4. En déduire la valeur de  $I$ .

## Intégrales fonction d'un paramètre

### Exercice 7.12 (☞)

Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt = \arctan x$ .

### Exercice 7.13 (☞)

Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan \frac{x}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t^2-1} \ln t dt$ .

### Exercice 7.14 (☞)

Définissons deux fonctions par  $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$  et  $g : x \mapsto \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ .

1. Étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbf{R}_+$ .
2. Montrer que  $g = \frac{\pi}{4} - f$ .
3. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

### Exercice 7.15 (☞)

Définissons une fonction par  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ .

1. Préciser le domaine de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur son domaine de définition.
3. Calculer  $f$ .
4. En déduire, pour  $a, b > 0$  l'expression de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ .

**Exercice 7.16** (☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t} \, dt$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ .

**Exercice 7.17** (☹☹)

Définissons une fonction par  $f : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-tx}}{1 + t^2} \, dt$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .
2. Déterminer des équivalents de  $f$  en  $+\infty$  et en 0.

**Exercice 7.18** (☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^3 + x^3} \, dt$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbf{R}_+$ .
2. Calculer la valeur  $f(0)$ .
3. Montrer que  $f$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.

**Exercice 7.19** (☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1 + t^2} \, dt$  et  $g : x \mapsto \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, dt$ .

1. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, dt$  convergent.
2. Montrer que  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation différentielle  $y'' + y = \frac{1}{x}$ .
3. En déduire que  $f = g$  puis la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ .

**Exercice 7.20** (☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t \, dt$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .
2. En déduire que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$ .
3. Exprimer  $f$  à partir de la constante  $C = f(1)$ .

**Exercice 7.21** (☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} e^{2x \cos t} \, dt$ .

1. Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle
2. En déduire une expression de  $f$ .

**Exercice 7.22** (☹)

1. Justifier l'existence de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ .
2. Montrer que l'application  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \, dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un domaine que l'on précisera.
3. En déduire l'expression de  $f$ .
4. Montrer que  $f$  est continue en 0.
5. Obtenir la valeur de  $I$ .

### Exercice 7.23 (☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbf{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle.
3. En déduire  $f$ .

### Exercice 7.24 (☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{1+t^3} dt$ .

1. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de  $f$ .
2. En utilisant la décomposition  $\frac{t}{1+t^3} = \frac{1}{3}(\frac{t+1}{t^2-t+1} - \frac{1}{t+1})$ , calculer  $f'(0)$ .
3. La fonction  $f$  admet-elle une limite en  $+\infty$  ?

### Exercice 7.25 (☹☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)} dt$ .

1. Déterminer le domaine  $\mathcal{D}$  de définition de  $f$  puis montrer que  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}$ .
2. Trouver une relation entre  $f(x)$  et  $f(1-x)$  pour  $x \in \mathcal{D}$ .
3. Déterminer limites et équivalents de  $f(x)$  aux bornes de  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 7.26 (☹☹☹)

Définissons une fonction par  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ .

1. Préciser le domaine de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$ .
3. Déterminer un équivalent de  $f'$  en  $+\infty$ .
4. Calculer  $f - f'$ .
5. En déduire un développement asymptotique de  $f$  à deux termes en  $+\infty$ .

### Exercice 7.27 (☹☹☹)

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}} dt$ .

### Exercice 7.28 (☹☹☹)

1. Déterminer un équivalent en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto \int_x^{x+1} \ln(\Gamma(t)) dt$ .
2. En déduire un équivalent en  $+\infty$  de  $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ .

### Exercice 7.29 (☹☹☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , nulle en dehors d'un segment de la forme  $[-A, A]$ . Posons  $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx} dt$ .

1. Préciser le domaine de définition de  $F$ .
2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe une constante  $C_n$  telle que  $|F(x)| \leq C_n x^{-n}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}_+^*$ .

# 8 – Séries entières

## Calculs de rayon de convergence

### Exercice 8.1 (☞)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient

1.  $n^2$

2. le  $n$ -ième terme de la suite de Fibonacci

3.  $\frac{n^n}{n!}$

4.  $e^{\alpha\sqrt{n}}$  avec  $\alpha \in \mathbf{R}$

5.  $(\ln n)^{-\ln n}$

6.  $(37 + (-1)^n)^n$

7.  $\frac{2^{(-1)^n}}{n}$

### Exercice 8.2 (☞)

Notons, pour tout  $n$ ,  $a_n$  la somme des puissances 37-ièmes des diviseurs positifs de  $n$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient  $a_n$ .

### Exercice 8.3 (☞)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient  $\text{tr}(A^n)$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 8.4 (☞☞)

Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient la  $n$ -ième décimale de  $\alpha$ .

### Exercice 8.5 (☞)

Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  des suites complexes telles que  $|a_n| \sim |b_n|$ . Montrer que les séries entières de coefficients  $a_n$  et  $b_n$  ont même rayon de convergence.

### Exercice 8.6 (☞☞)

Montrer que le rayon de convergence de la série entière de coefficient  $a_n$  est la borne supérieure de l'ensemble des  $r \geq 0$  tel que la suite  $(\sum_{k=0}^n a_k r^k)$  est bornée.

### Exercice 8.7 (☞☞)

Soit  $(a_n)$  une suite de complexes non nuls. Notons  $R$  et  $R'$  les rayons de convergence des séries entières de coefficients  $a_n$  et  $\frac{1}{a_n}$ . Montrer que si  $R$  et  $R'$  sont finis, alors  $RR' \leq 1$ .

### Exercice 8.8 (☞☞)

Soit  $\ell \in \mathbf{R}_+^*$  et  $(a_n)$  une suite ne s'annulant pas telle que  $\frac{a_{n+3}}{a_n} \rightarrow \ell$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient  $a_n$ .

### Exercice 8.9 (☞☞☞)

Soit  $(a_n)$  une suite. Posons, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A_n$  la  $n$ -ième somme partielle de la série de terme général  $a_n$ . Montrer que les séries entières  $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$  et  $\sum \frac{A_n}{n!} x^n$  ont même rayon de convergence.

## Calculs de sommes

### Exercice 8.10 (☹)

Déterminer la somme des séries entières

$$1. \sum \frac{1}{2n+1} x^n$$

$$2. \sum \frac{4n+1}{(2n-1)(n+1)} x^n$$

$$3. \sum \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$$

$$4. \sum \frac{n}{(2n+1)!} x^n$$

$$5. \sum \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{n} x^n$$

### Exercice 8.11 (☹☹)

Déterminer la somme de la série entière  $\sum n^{(-1)^n} x^n$ .

### Exercice 8.12 (☹☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  et  $g : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ .

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- Montrer que  $g$  est définie sur  $[-1, 1]$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ .
- Calculer  $f'$  sur  $] -1, 1[$ . En déduire que  $f + g = 0$  sur  $[-1, 1]$ .
- À l'aide d'une intégration par parties et d'un changement de variable, relier  $g(x)$ ,  $g(1-x)$  et  $g(1)$ .
- En déduire  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n n^2}$ .

### Exercice 8.13 (☹☹☹)

Posons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$ .

- Déterminer la nature de la série de terme général  $(-1)^n a_n$ .
- Trouver une relation de récurrence liant  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient  $a_n$ .
- Préciser la nature de la série de terme général  $a_n \alpha^{\sqrt{n}}$  pour  $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ .

### Exercice 8.14 (☹)

Soit  $(u_n)$  une suite bornée,  $(S_n)$  la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général  $u_n$ .

- Déterminer les rayons de convergence de  $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$  et  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$ .
- Trouver une relation entre  $u'$ ,  $S'$  et  $S$ .
- Déterminer la limite de  $S(x)e^{-x}$  en  $+\infty$  dans le cas où  $u_n = (-1)^n$ .

### Exercice 8.15 (☹☹☹)

Soit  $(a_n)$  la suite définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$ .

- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $|a_n| \leq 2^{n+1} - 1$ .  
Qu'en déduire sur le rayon de la série entière  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ?
- Calculer  $S(x)$  puis en déduire la valeur de  $a_n$ .

## Étude au bord de l'intervalle de convergence

### Exercice 8.16 (☹)

Soit  $(a_n)$  une suite de réels positifs telle que la série de terme général  $a_n$  est divergente. Supposons que le rayon de convergence de la série entière de coefficient  $a_n$  vaut 1 et notons  $f$  sa somme. Montrer que  $f(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow 1$ .

### Exercice 8.17 (☹☹)

Considérons la série entière de coefficient  $\tan \frac{1}{\sqrt{n}}$  et notons  $f$  sa somme.

1. Calculer le rayon de convergence  $R$  de la série entière définissant  $f$  puis étudier la convergence en  $\pm R$ .
2. Déterminer la limite en 1 de  $x \mapsto (1-x)f(x)$ .

### Exercice 8.18 (☹☹)

Considérons la série entière de coefficient  $(-1)^n \ln n$  et notons  $f$  sa somme.

1. Calculer le rayon de convergence  $R$  de la série entière définissant  $f$  puis étudier la convergence en  $\pm R$ .
2. Montrer que  $f$  admet une limite finie en  $R$ .  
Indication : on pourra introduire  $(1+x)f(x)$ .

### Exercice 8.19 (☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2^n}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.
2. Exprimer, pour  $x \in ]-R, R[$ ,  $f(x^2)$  en fonction de  $f(x)$  et  $x$ .
3. En déduire la limite éventuelle de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow R$ .

### Exercice 8.20 (☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Montrer que  $f(x) = o(e^x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 8.21 (☹☹)

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n$  la somme partielle de la série harmonique, puis considérons les fonctions  $f$  et  $g$  sommes des séries entières de coefficients  $H_n$  et  $\ln n$ .

1. Déterminer les rayons de convergence de ces séries entières.
2. Calculer  $f$ .
3. Montrer que  $f(x) \underset{1}{\sim} g(x)$ .
4. En considérant  $(1-x)g(x)$ , montrer que  $g$  admet une limite finie en  $-1$ .

## Développement en série entière

### Exercice 8.22 (☹)

Développer en série entière les fonctions suivantes

$$1. x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$2. x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$$

$$3. x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

**Exercice 8.23** (☹☹)

1. Préciser la suite  $(a_n)$  des coefficients du développement en série entière de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .
2. Déterminer un équivalent simple de  $a_n$ .
3. En déduire un équivalent en 1 de  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ .

**Exercice 8.24** (☹☹)

Soit  $f : x \mapsto \int_0^1 x e^{-xt \ln t} dt$ .

1. Étudier la régularité de  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .
2. Calculer le développement en série entière de  $f$ .

**Exercice 8.25** (☹☹☹)

Soit  $a > 0$  et  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable telle que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f'(x) = f(ax)$ .

1. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
2. Montrer que  $f$  n'est pas développable en série entière si  $|a| > 1$  et  $f(0) \neq 0$ .
3. Montrer que  $f$  est développable en série entière si  $|a| \leq 1$ .

**Exercice 8.26** (☹☹☹)

Soit  $a > 0$  et  $f : [0, a[ \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f^{(n)} \geq 0$ .

1. Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $R_n(x)$  le reste intégral de Taylor d'ordre  $n$  de  $f$  en 0. Montrer que  $x \mapsto x^{-n-1} R_n(x)$  est croissante sur  $[0, a[$ .
2. En déduire que  $f$  est développable en série entière sur  $[0, a[$ .

**Exercice 8.27** (☹☹☹)

1. Soit  $f$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R$  strictement positif telle qu'il existe une suite  $(x_k)$  de limite nulle avec, pour tout  $k$ ,  $0 < |x_k| < R$ , et  $f(x_k) = 0$ . Montrer que tous les coefficients de  $f$  sont nuls.
2. Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en séries entières avec un rayon supérieur ou égal à 1 telles que  $f(\frac{1}{2^k}) = \frac{1}{k}$  pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ .

## Équations différentielles

### Exercice 8.28 (☹☹)

Considérons la fonction  $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle (E)  $xy'' + y' - xy = -1$ .
2. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
3. En déduire la valeur des intégrales  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ .

### Exercice 8.29 (☹☹)

Considérons la suite  $(a_n)$  définie par  $a_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$ . Notons  $f$  la somme de la série entière de coefficient  $a_n$  et  $R$  son rayon.

1. Montrer que  $R \geq 1$ .
2. Montrer que, pour  $x \in ]-R, R[$ ,  $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ .

## Applications au dénombrement

### Exercice 8.30 (☹☹)

Notons  $D_0 = 1$  puis, pour tout  $n \geq 1$ ,  $D_n$  le nombre de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (ou plus généralement d'un ensemble de cardinal  $n$ ) sans point fixe. Soit  $R$  le rayon de la série entière de coefficient  $\frac{D_n}{n!}$  et  $f$  sa somme.

1. Justifier que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$ .
2. Montrer que  $R \geq 1$  puis calculer  $f$ .
3. Expliciter  $e^x f(x)$ . En déduire une expression de  $D_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

### Exercice 8.31 (☹☹☹)

Une application  $u : X \rightarrow X$  est une involution de l'ensemble  $X$  si  $u \circ u = \text{Id}$ . Notons  $I_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_n$  le nombre d'involutions d'un ensemble à  $n$  éléments.

1. Calculer  $I_1, I_2$  et  $I_3$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ .  
Indication : on pourra partitionner les involutions de  $\llbracket 1, n+2 \rrbracket$  selon l'image de  $n+2$ .  
Soit  $R$  le rayon de la série entière de coefficient  $\frac{I_n}{n!}$  et  $f$  sa somme.
3. Montrer que  $R > 0$ .
4. Montrer que, pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,  $f'(x) = (1+x)f(x)$ . En déduire  $f$ .

### Exercice 8.32 (☹☹☹)

Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $B_n$  le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments. Posons  $B_0 = 1$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ .  
Indication : on pourra partitionner les partitions de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  selon le cardinal de la partie contenant  $n+1$ .  
Soit  $R$  le rayon de la série entière de coefficient  $\frac{B_n}{n!}$  et  $f$  sa somme.
2. Montrer que  $R > 0$  puis déterminer une équation différentielle dont  $f$  est solution.
3. Exprimer  $f$  puis, en déduire une expression de  $B_n$ .



# 9 – Espaces probabilités

## Manipulation d'événements

### Exercice 9.1 (☞)

Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

1. Montrer que  $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \min\{\mathbf{P}(A_i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ .
2. Montrer que  $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) - (n-1)$ .

### Exercice 9.2 (☞)

Soit  $A, B$  et  $C$  des événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  tels que  $\mathbf{P}(A|C) > P(B|C)$  et  $\mathbf{P}(A|\bar{C}) > P(B|\bar{C})$ . Montrer que  $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B)$ .

### Exercice 9.3 (☞)

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Montrer qu'il n'existe pas des événements  $A_1, \dots, A_n$ , indépendants, de réunion  $\Omega$  et de même probabilité  $p < 1$ .

### Exercice 9.4 (☞)

Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements indépendants d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)\right) \leq \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)}.$$

### Exercice 9.5 (☞☞)

Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'événements d'un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Posons  $\limsup A_n = \bigcap_{p \geq 1} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n\right)$ .

1. Montrer que  $\limsup A_n$  est l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels qu'il existe une infinité d'indices  $k$  vérifiant  $\omega \in A_k$ .
2. Interpréter de même l'événement  $\liminf A_n = \bigcup_{p \geq 1} \left(\bigcap_{n \geq p} A_n\right)$ .

### Exercice 9.6 (☞☞☞)

Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'événements d'un espace probabilisé.

1. Supposons que la série de terme général  $\mathbf{P}(A_n)$  converge. Montrer que  $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p \geq 1} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n\right)\right) = 0$ .
2. Supposons que la série de terme général  $\mathbf{P}(A_n)$  diverge et que les événements sont mutuellement indépendants. Montrer que  $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p \geq 1} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n\right)\right) = 1$ .

### Exercice 9.7 (☞☞)

Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements. Définissons, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $B_k$  l'événement « au moins  $k$  événements parmi  $A_1, \dots, A_n$  sont réalisés ». Montrer, en calculant l'espérance d'une somme d'indicatrices judicieusement choisies, que  $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(B_k)$ .

### Exercice 9.8 (☞☞)

Soit  $(A_n)$  une suite d'événements telle que la série de terme général  $\mathbf{P}(A_n)$  converge et  $S$  sa somme. Notons, pour tout  $k$ ,  $B_k$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  qui appartiennent à exactement  $k$  événements de la suite  $(A_n)$ . Montrer que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\mathbf{P}(B_k) \leq \frac{1}{k}S$ .

## Modélisation

### Exercice 9.9 (☞)

On considère des dés équilibrés et des lancers indépendants.

1. Comparer la probabilité d'obtenir un 6 en lançant un dé et la probabilité d'obtenir un double 6 en lançant deux dés.
2. Comparer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en lançant un dé quatre fois et la probabilité d'obtenir au moins un double 6 en lançant deux dés vingt-quatre fois.

### Exercice 9.10 (☞)

Une urne contient  $n$  boules blanches et  $n$  boules rouges. On tire les boules deux par deux sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir à chaque tirage une boule blanche et une boule rouge ?

### Exercice 9.11 (☞)

Une urne contient  $2n$  boules numérotées de 1 à  $2n$ . On tire toutes les boules successivement et sans remise.

1. Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant, non nécessairement consécutivement.
2. Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant et consécutivement.

### Exercice 9.12 (☞)

Une urne contient  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges; tirons les boules avec les règles suivantes

- si la boule est blanche, on la retire définitivement;
- si la boule est rouge, on la replace dans l'urne.

Déterminer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en  $n$  tirages.

### Exercice 9.13 (☞)

Considérons  $n$  pièces numérotées de 1 à  $n$  telles que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la pièce numéro  $k$  donne Pile avec probabilité  $\frac{1}{2^{k+1}}$ . Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair de Piles en lançant toutes ces pièces.

### Exercice 9.14 (☞☞)

Considérons  $n$  pièces équilibrées numérotées de 1 à  $n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $A_k$  l'événement « la pièce numéro  $k$  donne Pile » et  $A_0$  l'événement « le nombre de Piles obtenus est pair ».

1. Montrer que les événements  $A_0, \dots, A_n$  ne sont pas indépendants.
2. Soit  $I$  une partie de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  de cardinal  $n$ . Montrer que les événements  $(A_i)_{i \in I}$  sont indépendants.

### Exercice 9.15 (☞☞)

Considérons une pièce équilibrée et une pièce avec deux côtés Pile. On lance l'une de ces pièces à  $n$  reprises et on obtient  $n$  Piles. Quelle est la probabilité que la pièce lancée soit équilibrée ?

### Exercice 9.16 (☹)

Soit  $n \geq 2$ . Considérons un jeu de cartes numérotées initialement de 1 à  $n$ . Après avoir mélangé les cartes, quelle est la probabilité que

1. la carte 1 soit plus loin dans le paquet que la carte 2 ?
2. les cartes 1 et 2 soient voisines ?

### Exercice 9.17 (☹☹)

Soit  $n \geq 2$ . Une permutation  $\sigma \in S_n$  bat un record en  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  si  $\sigma(j) > \sigma(i)$  pour tout  $i < j$ . Déterminer la probabilité qu'une permutation choisie uniformément dans  $S_n$  batte un record en  $j$ .

### Exercice 9.18 (☹☹☹)

Soit  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}$  la probabilité uniforme sur  $\Omega$ . Notons  $\mathbb{P}_n$  l'ensemble des diviseurs premiers de  $n$  et définissons, pour tout  $p \in \mathbb{P}_n$ ,  $A_p = \{a \in \Omega, p|a\}$ .

1. Calculer  $\mathbf{P}(A_p)$  pour tout  $p \in \mathbb{P}_n$ .
2. Montrer que les événements  $A_p$  pour  $p \in \mathbb{P}_n$  sont indépendants.  
Soit  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  la fonction d'Euler ( $\varphi(n)$  est donc le nombre d'entiers  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $k \wedge n = 1$ ).
3. Montrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{p \in \mathbb{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

### Exercice 9.19 (☹☹☹☹)

Un message binaire est successivement transmis par des relais. Le  $k$ -ième relais transmet l'opposé de l'information reçue avec probabilité  $p_k \in [0, \frac{1}{2}[$  et la transmet à l'identique sinon (indépendamment des autres relais). Notons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\alpha_n$  la probabilité que le message n'ait jamais été altéré après  $n$  relais et  $\beta_n$  la probabilité que le message après  $n$  relais soit identique au message initial. Montrer que  $\lim \alpha_n = 0$  si, et seulement si,  $\lim \beta_n = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 9.20 (☹☹☹☹)

Soit  $p_1$  et  $p_2$  deux nombres premiers,  $n \in \mathbf{N}$  tels que  $2 \leq p_1 < p_2 \leq n$ . Considérons l'ensemble  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$  muni de la probabilité uniforme  $\mathbf{P}$  et définissons les événements  $E_1 = \{k \in \Omega, p_1|k\}$  et  $E_2 = \{k \in \Omega, p_2|k\}$ .

Montrer que  $E_1$  et  $E_2$  sont indépendants si, et seulement si,  $n$  s'écrit sous la forme  $n = kp_1p_2 + \ell p_1$  avec  $k, \ell \in \mathbf{N}$  vérifiant  $\ell p_1 < p_2$ .

# 10 – Variables aléatoires

## Calculs de lois

### Exercice 10.1 (☹☹)

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $p \in ]0, 1[$  et  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$  tel qu'il existe  $a \in \mathbf{R}$  vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k.$$

Déterminer  $a$  puis calculer  $\mathbf{E}(X)$ .

### Exercice 10.2 (☹)

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $Y$  la variable telle que la loi de  $Y$  sachant  $X = k$  est uniforme sur  $\llbracket 1, k \rrbracket$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Déterminer la loi de  $Y$ .

### Exercice 10.3 (☹)

Soit  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$  des événements tels que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}(A_k) = \frac{k}{n}$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire de comptage du nombre d'événements réalisés  $N = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$ .

### Exercice 10.4 (☹)

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$ . Considérons  $N$  la variable aléatoire égale à 0 si  $X_1 = \dots = X_n = 1$  et à  $\min\{k \leq n, X_k = 0\}$  sinon. Déterminer la loi de  $N$ .

### Exercice 10.5 (☹)

Soit  $p \in ]0, 1[$ ,  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ . Déterminer la loi de  $\frac{X}{Y}$ .

### Exercice 10.6 (☹)

Soit  $\lambda > 0$  et  $p \in ]0, 1[$ ,  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre  $p$  et de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Calculer la probabilité  $\mathbf{P}(X = Y)$ .

### Exercice 10.7 (☹☹☹)

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $p \in ]0, 1[$ ,  $X$  une variable suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ ,  $Y$  une variable suivant une loi binomiale de paramètres  $n+1$  et  $p$ . Montrer que, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}(X \geq k) \leq \mathbf{P}(Y \geq k)$ .

## Espérance, variance

### Exercice 10.8 (☹)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

1. Reconnaître la loi de la variable  $\min(X_1, \dots, X_n)$ .
2. Est-ce que la variable  $\max(X_1, \dots, X_n)$  admet une espérance finie?

### Exercice 10.9 (👉)

Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$ , indépendantes et de même loi. Notons  $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$  et  $Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2}$ .

1. Montrer que  $Y_1$  admet une espérance puis la calculer.
2. Montrer que  $Y_1$  admet une variance puis calculer la covariance de  $Y_1$  et  $Y_2$  en fonction de celle-ci.

### Exercice 10.10 (👉👉)

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n) \leq \mathbf{E}(X) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n).$$

### Exercice 10.11 (👉👉👉)

1. Soit  $X$  une variable aléatoire bornée telle qu'il existe  $X_1, X_2$  des variables indépendantes de même loi que  $X$  vérifiant  $X^2$  et  $X_1 X_2$  suivent la même loi. Montrer que  $X$  est presque sûrement constante.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire positive telle qu'il existe  $X_1, X_2$  des variables indépendantes de même loi que  $X$  vérifiant  $2X$  et  $X_1 + X_2$  suivent la même loi. Montrer que  $X$  est presque sûrement constante.

### Exercice 10.12 (👉👉👉👉)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète.

1. Montrer qu'il existe un réel  $m$  tel que  $\mathbf{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$  et  $\mathbf{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ .  
Un tel réel est appelé médiane de  $X$ .
2. Supposons que  $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$ . Montrer que l'application  $f : t \mapsto \mathbf{E}(|X - t|)$  admet un minimum global en chaque médiane de  $X$ .
3. Supposons que  $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$ . Déterminer le minimum de l'application  $g : t \mapsto \mathbf{E}((X - t)^2)$ .
4. Supposons que  $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$ . Montrer que si  $m$  est une médiane de  $X$  et  $\sigma$  son écart-type, alors  $|\mathbf{E}(X) - m| \leq \sigma$ .

### Exercice 10.13 (👉👉👉👉)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{N}$ . Notons  $X < Y$  si, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{P}(X \geq t) \leq \mathbf{P}(Y \geq t)$ .

1. Montrer que  $X < Y$  si, et seulement si, pour toute fonction  $h : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+$  croissante et bornée,  $\mathbf{E}(h(X)) \leq \mathbf{E}(h(Y))$ .
2. Soit  $X$  et  $Y$  de lois de Poisson de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ . Montrer que  $X < Y$  si, et seulement si,  $\lambda \leq \mu$ .
3. Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes telles que  $X < Y$ . Montrer que  $\mathbf{P}(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}$ .

## Miscellanées

### Exercice 10.14 (👉👉)

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$  et  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  telles que les variables  $X$  et  $f(X)$  sont indépendantes. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbf{N}$  tel que  $\mathbf{P}(f(X) = a) = 1$ .

### Exercice 10.15 (☹☹☹)

Soit  $X_1, X_2$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{N}$ . La distance en variations totales entre les lois de  $X_1$  et  $X_2$  est la quantité

$$d_{\text{VT}}(X_1, X_2) = \sup\{|\mathbf{P}(X_1 \in A) - \mathbf{P}(X_2 \in A)|, A \subset \mathbf{N}\}.$$

1. Justifier que, pour tout  $A \subset \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}(X_1 \in A) - \mathbf{P}(X_2 \in A) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_{X_1 \in A} - \mathbb{1}_{X_2 \in A})$ .
2. En déduire que  $d_{\text{VT}}(X_1, X_2) \leq 2\mathbf{P}(X_1 \neq X_2)$ .

### Exercice 10.16 (☹☹)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbf{N}$  telles que  $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $\mathbf{P}(X > n)\mathbf{P}(Y < n) = 0$ .
2. En déduire qu'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $\mathbf{P}(X \leq n \leq Y) = 1$ .

### Exercice 10.17 (☹☹)

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Donner un équivalent de  $\mathbf{P}(\max\{X, Y\} = n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 10.18 (☹☹)

1. Considérons une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$  telle que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$  et notons, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\theta_n = \mathbf{P}(T = n | T \geq n)$ .
  - (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\theta_n \in [0, 1[$ .
  - (b) Exprimer  $\mathbf{P}(T \geq n)$  en fonction des  $\theta_k$ . Montrer que la série de terme général  $\theta_n$  diverge.
2. Réciproquement, soit  $(\theta_n)$  est une suite à valeurs dans  $[0, 1[$  telle que la série de terme général  $\theta_n$  diverge. Montrer qu'il existe une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $\mathbf{N}$  telle que  $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$  et  $\mathbf{P}(T = n | T \geq n) = \theta_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

## Inégalités

### Exercice 10.19 (☹)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives et que pour tout  $t > 0$ , la variable  $e^{tX}$  admet une espérance. Montrer que

$$\forall a > 0, \forall t > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} \mathbf{E}(e^{tX}).$$

### Exercice 10.20 (☹)

Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = a > 0$ .

1. Montrer que  $\mathbf{P}(X \geq 2a) \leq \mathbf{P}((X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2)$ .
2. Montrer que  $\mathbf{P}(X \geq 2a) \leq \frac{1}{a+1}$ .

### Exercice 10.21 (☹☹)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle admettant une espérance  $\mathbf{E}(X) \geq 0$ .

1. Montrer que, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $X \leq \lambda \mathbf{E}(X) + X \mathbb{1}_{X > \lambda \mathbf{E}(X)}$ .
2. Supposons que  $0 < \mathbf{E}(X^2) < +\infty$ . Montrer que, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{P}(X > \lambda \mathbf{E}(X)) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$ .  
Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

### Exercice 10.22 (☞☞)

Soit  $a > 0$  et  $X$  une variable aléatoire positive admettant une variance telle que  $\mathbf{E}(X^2) = 1$  et  $\mathbf{E}(X) > a$ . Montrer que, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{P}(X \geq \lambda a) \geq (1 - \lambda)^2 a^2$ .

### Exercice 10.23 (☞☞)

Soit  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  des réels tels que  $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$  et  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  des variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par  $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . Définissons la variable aléatoire  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\text{ch } x \leq \exp(\frac{x^2}{2})$ .
2. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , la variable aléatoire  $\exp(tS_n)$  admet une espérance puis que  $\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$ .
3. Montrer que, pour tout  $c > 0$ ,  $\mathbf{P}(S_n \geq c) \leq \exp(-\frac{c^2}{2})$ .
4. En déduire que, pour tout  $c > 0$ ,  $\mathbf{P}(|S_n| \geq c) \leq 2 \exp(-\frac{c^2}{2})$ .

## Fonctions génératrices

### Exercice 10.24 (☞)

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$  de fonction génératrice  $G : t \mapsto \frac{1}{2-t^2}$ . Déterminer la loi de  $X$  puis de  $\frac{X}{2}$ .

### Exercice 10.25 (☞)

Soit  $X$  une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\lambda$  et  $G$  sa fonction génératrice.

1. Montrer que, pour tout  $t \geq 1$  et tout  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{G(t)}{t^a}$ .
2. En déduire que  $\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq (\frac{e}{4})^\lambda$ .

### Exercice 10.26 (☞)

Soit  $a \in \mathbf{R}$  et  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$  de fonction génératrice égale à  $G : t \mapsto a \exp(1 + t^2)$  pour  $t \in \mathbf{R}$ .

1. Trouver la valeur de  $a$ .
2. Déterminer la loi de  $X$ .
3. Est-ce que  $X$  admet une espérance et une variance? Si oui, les calculer.

### Exercice 10.27 (☞)

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$  de fonction génératrice égale à  $G : t \mapsto 1 - \sqrt{1-t}$  pour  $|t| < 1$ .

1. Calculer  $\mathbf{P}(X = n)$  pour  $n \geq 0$ .
2. Soit  $Y$  une variable aléatoire indépendante de même loi que  $X$ , définie sur le même espace de probabilité que  $X$ . Calculer  $\mathbf{P}(X + Y = n)$ .
3. La variable  $X$  admet-elle une espérance?

### Exercice 10.28 (☞☞)

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de Bernoulli de paramètre  $p$ . Notons  $T_n$  l'indice du  $n$ -ième « succès ».

1. Déterminer la loi de  $T_n$ .
2. Calculer la fonction génératrice de  $T_n$  puis en déduire  $\mathbf{E}(T_n)$ .

### Exercice 10.29 (☞☞☞)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans une partie dénombrable de  $[0, 1]$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  suivent la même loi si, et seulement si, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{E}(X^n) = \mathbf{E}(Y^n)$ .

## Applications

### Exercice 10.30 (☞☞)

Soit  $E$  un espace préhilbertien,  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs unitaires de  $E$  et  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par  $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ .

1. Calculer l'espérance de la variable  $\|U\|^2$  où  $U = X_1 v_1 + \dots + X_n v_n$ .
2. En déduire qu'il existe  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$  tel que  $\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$ .
3. Montrer que  $\mathcal{F}$  est orthogonale si, et seulement si, pour tout  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ ,  $\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$ .
4. Montrer que si  $\mathcal{F}$  n'est pas orthogonale, il existe  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$  tel que  $\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}$ .

### Exercice 10.31 (☞)

Soit  $X, Y$  des variables indépendantes de loi géométrique de paramètre  $p$ . Déterminer la probabilité que la matrice

$$\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$$

soit nilpotente.

### Exercice 10.32 (☞)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ ,  $L$  la matrice ligne dont les coefficients sont les  $X_j$  et  $M = L^\top L$ .

1. Déterminer les lois des variables  $\det(M)$ ,  $\text{tr}(M)$  et  $\text{rg}(M)$ .
2. Quelle est la probabilité que  $M$  soit une matrice de projection?
3. Soit  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  dont tous les coefficients valent 1. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $U^\top M U$ ; calculer sa variance dans le cas  $n = 2$ .

## Modélisation

### Exercice 10.33 (☞)

Soit  $n \geq 3$ . Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire deux boules et on note  $X$  le plus petit numéro d'une boule tirée,  $Y$  le plus grand. Préciser les lois des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  puis calculer leurs espérances.

### Exercice 10.34 (☞)

Soit  $n \geq 3$ . Une urne contient 2 boules rouges et  $n - 2$  boules blanches. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $T_1$  égale au numéro du tirage de la première boule rouge.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $T_2$  égale au numéro du tirage de la seconde boule rouge.



### Exercice 10.35 (👉)

Considérons le plan ramené à un repère orthonormé. Une grenouille, initialement à l'origine, fait des sauts unités aléatoires dans l'une des quatre directions selon les axes. Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $X_n$  l'abscisse de la grenouille après  $n$  sauts. Calcule  $\mathbf{E}(X_n)$  et  $\mathbf{E}(X_n^2)$ .

### Exercice 10.36 (👉)

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . Tirons une poignée de boules (les  $2^n$  poignées sont équiprobables) et notons  $X$  la somme des valeurs des boules extraites. Déterminer l'espérance de  $X$ .  
Indication : on pourra écrire  $X$  comme une somme de variables indicatrices.

### Exercice 10.37 (👉)

Un écosystème compte  $N$  individus répartis en  $r$  espèces, de proportions respectives  $p_1, \dots, p_r$ . On prélève  $n$  individus avec remise et on note, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , le nombre d'espèces dont a été prélevé exactement  $k$  individus.

1. Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\mathbf{E}(S_k) = \binom{n}{k} \sum_{j=1}^r p_j^k (1 - p_j)^{n-k}.$$

Indication : on pourra écrire  $S_k$  comme somme de variables indicatrices.

2. En déduire que  $\mathbf{E}(S_1)^2 \leq \frac{2n}{n-1} \mathbf{E}(S_0) \mathbf{E}(S_2)$ .

### Exercice 10.38 (👉👉)

Un démarcheur dispose d'une liste de  $n$  correspondants qu'il appelle par vagues successives. Chaque appel est indépendant et identique. La probabilité d'obtenir un correspondant lors d'un appel est  $p \in ]0, 1[$ .

- Lors de la première vague, il appelle les  $n$  correspondants : soit  $X_1$  le nombre de correspondants obtenus.
- Lors de la deuxième vague, il appelle les  $n - X_1$  correspondants absents lors de la première vague : soit  $X_2$  le nombre de correspondants lors de cette vague d'appels.
- Et ainsi de suite.

1. Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes?
2. Déterminer les lois de la variable  $Y_i$  qui indique le numéro de la vague à laquelle le correspondant numéro  $i$  répond enfin, de la variable  $X_1$ , de la variable  $X_2, \dots$

### Exercice 10.39 (👉👉)

Considérons une urne comportant  $n$  boules blanches et  $n$  boules rouges. On procède à des tirages sans remise jusqu'à obtenir une urne de composition monochrome. Déterminer le nombre moyen de boules restant alors dans l'urne.

### Exercice 10.40 (👉👉👉)

Une urne contient initialement des boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire une boule et on lit  $k$  son numéro :

- si  $k = 1$ , l'expérience s'achève;
- sinon, on enlève de l'urne toutes les boules avec un numéro supérieur ou égal à  $k$  et on procède à un nouveau tirage.

Soit  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages de l'expérience.

1. Montrer que, pour  $n > 2$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X_{k-1} = j - 1)$ .
2. En déduire que, pour  $n > 2$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbf{P}(X_n = j) = \frac{n-1}{n} \mathbf{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \mathbf{P}(X_{n-1} = j - 1).$$

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $G_n$  la fonction génératrice de  $X_n$ .

3. Calculer  $G_1(t)$  puis montrer que  $G_n(t) = \frac{n-1+t}{n} G_{n-1}(t)$  pour tout  $n \geq 2$ .
4. Calculer  $\mathbf{E}(X_n)$  en fonction de  $\mathbf{E}(X_{n-1})$  puis déterminer un équivalent de  $\mathbf{E}(X_n)$ .

#### Exercice 10.41 (👉👉)

On dispose  $n$  jetons bicolores blanc/rouge avec initialement  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$  faces rouges visibles. À chaque étape, on choisit successivement deux jetons au hasard; si le second n'est pas de la même couleur que le premier, on le retourne. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_k$  égale au nombre de faces rouges visibles après  $k$  étapes.

#### Exercice 10.42 (👉👉)

Soit  $s > 1$  et  $\mathbf{P}$  la probabilité sur  $\mathbf{N} \setminus \{0\}$  définie par

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}.$$

Pour tout nombre premier  $p$ , on définit une variable aléatoire  $X_p : n \mapsto v_p(n)$  où  $v_p(n)$  désigne l'exposant de  $p$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $n$ .

1. Montrer que, pour tout  $p \in \mathcal{P}$ , la variable  $X_p + 1$  suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que les variables aléatoires  $(X_p)_{p \in \mathcal{P}}$  sont indépendantes.
3. En déduire l'identité suivante

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

# 11 – Espaces vectoriels normés

## Normes

### Exercice 11.1 (☞)

Posons, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $N(x, y) = \int_0^1 |x - ty| dt$ .

1. Vérifier que  $N$  est une norme sur  $\mathbf{R}^2$ .
2. Calculer  $N(x, 1)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .
3. En déduire l'expression de  $N(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

### Exercice 11.2 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une norme  $N$ . Montrer que l'application  $N' : (x_1, x_2) \mapsto \max\{N(x_1), N(x_2), N(x_1 - x_2)\}$  est une norme sur  $E^2$ .

### Exercice 11.3 (☞)

Montrer que l'application  $N : \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{k} + \left| \sum_{k=0}^n a_k \right|$  est une norme sur  $\mathbf{R}_n[X]$ .

### Exercice 11.4 (☞)

Montrer que l'application  $P \mapsto \sup\{|P(t) - P'(t)|, t \in [0, 1]\}$  est une norme sur  $\mathbf{R}[X]$ .

### Exercice 11.5 (☞)

Définissons, pour  $P \in \mathbf{R}[X]$ ,  $N_1(P) = \sup\{|P(t)|, t \in [-1, 1]\}$ ,  $N_2(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ .

1. Justifier que  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes sur  $\mathbf{R}[X]$ .
2. Étudier la convergence de la suite  $(P_n)$  avec  $P_n = \frac{1}{n} X^n$  pour les normes  $N_1$  et  $N_2$ .

### Exercice 11.6 (☞)

Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Posons, pour tout  $u \in E$ ,  $N(u) = \sup\{|u_n| + |u_{2n}|, n \in \mathbf{N}\}$ .

1. Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .
2. Comparer  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$ .

### Exercice 11.7 (☞)

1. Justifier que l'ensemble  $E$  des fonctions  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  lipschitziennes est un espace vectoriel.  
Posons, pour tout  $f \in E$ ,

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \quad N(f) = |f(0)| + \sup_{x \neq 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right|.$$

2. Montrer que  $\|\cdot\|$  et  $N$  sont des normes sur  $E$ .

### Exercice 11.8 (☞)

Soit  $E$  l'espace des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant  $f(0) = f(1) = 0$ . Posons, pour tout  $f \in E$ ,  $N(f) = \|f''\|_\infty$ .

1. Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .
2. Comparer  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$ .

### Exercice 11.9 (☹☹)

Pour tout  $P \in \mathbf{R}[X]$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ , posons  $\theta_n(P) = \int_0^1 P(t) t^n dt$ .

1. Justifier, pour tout  $P \in \mathbf{R}[X]$ , l'existence de  $N(P) = \sup\{|\theta_n(P)|, n \in \mathbf{N}\}$ .
2. Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathbf{R}[X]$ .

### Exercice 11.10 (☹☹)

Soit  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbf{R}$ . Montrer que l'application  $x \mapsto \|\sum_{k=1}^n x_k f_k\|_\infty$  est une norme sur  $\mathbf{R}^n$  si, et seulement si, la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

## Boules

### Exercice 11.11 (☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel muni de deux normes  $N$  et  $N'$ .

1. Montrer que si  $\mathcal{B}(0_E, 1) \subset \mathcal{B}'(0_E, 1)$ , alors  $N'(x) \leq N(x)$  pour tout  $x \in E$ .
2. Soit  $r, r' > 0$ . Traduire l'inclusion  $\mathcal{B}(0_E, r) \subset \mathcal{B}'(0_E, r')$  en une inégalité sur les normes.
3. Que dire de deux normes qui admettent la même boule unité ouverte?

### Exercice 11.12 (☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $x, y \in E, r > 0$ . Déterminer les  $\rho \in \mathbf{R}_+^*$  tels que  $\mathcal{B}(x, r) \subset \mathcal{B}(y, \rho)$ .

### Exercice 11.13 (☹☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $x \in E, r > 0$ . Déterminer  $\text{Vect}(\mathcal{B}(x, r))$ .

### Exercice 11.14 (☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $x, x' \in E, r, r' > 0$ . Montrer que l'ensemble  $\{y + y', y \in \mathcal{B}(x, r), y' \in \mathcal{B}(x', r')\}$  est une boule dont on précisera centre et rayon.

### Exercice 11.15 (☹☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $x, x' \in E, r, r' > 0$  tel que  $\overline{\mathcal{B}}(x, r) = \overline{\mathcal{B}}(x', r')$ . Montrer que  $x = x'$ .

## Ouverts et fermés

### Exercice 11.16 (☹☹)

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbf{R}$ , à la fois fermée et ouverte. Montrer que  $A = \mathbf{R}$ .

### Exercice 11.17 (☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $A$  un ouvert de  $E$  et  $B$  une partie (quelconque) de  $E$ . Montrer que  $\{a + b, a \in A, b \in B\}$  est ouvert.

### Exercice 11.18 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  un ouvert de  $E$ . Montrer que la réunion des boules fermées  $\overline{\mathcal{B}}(a, 1)$  pour  $a \in A$  est un ouvert.

### Exercice 11.19 (☞☞)

Soit  $E$  l'espace des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ . Déterminer la nature topologique de

1. l'ensemble des fonctions  $f \in E$  telles que  $f(0) = f(1)$ ,
2. l'ensemble des fonctions  $f \in E$  croissantes,
3. l'ensemble des fonctions  $f \in E$  strictement positives.

### Exercice 11.20 (☞☞)

Montrer que l'ensemble des couples de vecteurs de  $\mathbf{R}^3$  linéairement indépendants est un ouvert.

### Exercice 11.21 (☞☞)

1. Soit  $F$  un fermé non vide de  $[0, 1]$ ,  $x_0 \in F$  et

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + d(x, F) & \text{si } x \leq x_0, \\ x - d(x, F) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des points fixes de  $f$  est  $F$ .

2. En déduire que tout fermé de  $[0, 1]$  est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .

### Exercice 11.22 (☞☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $F \subset E$  une partie fermée. Montrer que  $F^* = \{x \in E, \forall f \in F, [f, x] \subset F\}$  est un fermé.

## Intérieur et adhérence

### Exercice 11.23 (☞☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Le diamètre d'une partie  $A \subset E$  bornée non vide est

$$\text{diam}(A) = \sup\{N(x - y), x, y \in A\}.$$

Montrer que, pour toute partie  $A \subset E$  bornée non vide,  $A$  et  $\overline{A}$  ont le même diamètre.

### Exercice 11.24 (☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $A$  et  $B$  de  $E$  telles que, pour tout  $x \in E$ ,  $d(x, A) = d(x, B)$ . Montrer que  $\overline{A} = \overline{B}$ .

### Exercice 11.25 (☞☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $A$  et  $B$  deux ouverts disjoints. Montrer que l'intérieur de  $\overline{A}$  et l'intérieur de  $\overline{B}$  sont disjoints.

### Exercice 11.26 (☞☞☞)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $C$  une partie convexe de  $E$  telle que  $\overline{C} = E$ . Montrer que  $C = E$ .  
Indication : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de  $E$ .

## Suites matricielles

### Exercice 11.27 (☞)

Soit  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telles que  $A^k \rightarrow P$ ,  $B^k \rightarrow Q$ .

1. Montrer que  $P^2 = P$ .
2. Comparer  $AP$  et  $PA$ .
3. Montrer que si  $AB = BA$ , alors  $PQ = QP$ .

### Exercice 11.28 (☞)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  telle que  $4A^3 + 2A^2 + A = 0_n$ .

1. Montrer que la suite  $(A^k)$  converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer  $A$ .

### Exercice 11.29 (☞☞)

Soit  $A$  une matrice antisymétrique. Montrer que si la suite  $(A^k)$  converge, alors sa limite est la matrice nulle.

### Exercice 11.30 (☞)

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  diagonalisable et  $(B_k)$  une suite de matrices semblables à  $A$  qui converge vers  $B$ . Montrer que  $B$  est semblable à  $A$ .
2. Montrer que le résultat n'est plus vrai si on ne suppose plus la matrice  $A$  diagonalisable.

### Exercice 11.31 (☞)

1. Soit  $(A_k)$  une suite de matrices inversibles telles que  $A_k \rightarrow P$ , et  $A_k^{-1} \rightarrow Q$ . Montrer que  $P$  est inversible et que  $P^{-1} = Q$ .
2. Exhiber une suite de matrices inversibles qui converge vers une matrice non inversible.

### Exercice 11.32 (☞☞)

1. Montrer que toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles.
2. Montrer que, pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , les matrices  $AB$  et  $BA$  ont le même polynôme caractéristique.

### Exercice 11.33 (☞)

Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

## Continuité

### Exercice 11.34 (☞☞)

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé,  $A$  une partie non vide de  $E$ ,  $k > 0$  puis  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  une application  $k$ -lipschitzienne.

1. Soit  $x \in E$ . Montrer que  $E_x = \{kN(x - a) + f(a), a \in A\}$  admet une borne inférieure. On la note  $g(x)$ .
2. Montrer que l'application  $g$  est  $k$ -lipschitzienne.
3. Vérifier que  $g|_A = f$ .

**Exercice 11.35** (☹☹)

Pour tout  $P \in \mathbf{R}[X]$ , posons  $N_1(P) = \sup\{|P(t)|, t \in [0, 1]\}$  et  $N_2(P) = \sup\{|P(t)|, t \in [1, 2]\}$ . On admet que les applications  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes sur  $\mathbf{R}[X]$ . Considérons la forme linéaire  $\varphi : P \mapsto P(0)$  sur  $\mathbf{R}[X]$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est continue pour  $N_1$ .
2. En introduisant les polynômes  $(1 - \frac{X}{2})^n$ , montrer que  $\varphi$  n'est pas continue pour  $N_2$ .

**Exercice 11.36** (☹☹)

1. Montrer que, pour tout  $n > 0$ , il existe une constante  $c_n$  telle que  $|P'(0)| \leq c_n \|P\|_{\infty, [0,1]}$  pour tout  $P \in \mathbf{R}_n[X]$ .
2. Montrer que  $c_n \rightarrow +\infty$ .
3. L'application  $P \mapsto P'(0)$  est-elle continue sur  $\mathbf{R}[X]$  muni de la norme uniforme sur le segment  $[0, 1]$  ?

**Exercice 11.37** (☹☹)

Soit  $A, B$  deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  tels que  $A \subset U$  et  $B \subset V$ .

**Exercice 11.38** (☹☹)

1. Soit  $A, B \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ . Existe-t-il toujours une fonction  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{R})$  continue telle que  $\varphi(0) = A$  et  $\varphi(1) = B$  ?
2. Reprendre la question en remplaçant  $\mathbf{R}$  par  $\mathbf{C}$ .

**Exercice 11.39** (☹☹☹)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$  si, et seulement si, il existe  $C$  tel que  $\|u(x)\| \leq C \|u^2(x)\|$  pour tout  $x \in E$ .

# 12 – Espaces préhilbertiens réels

## Produit scalaire

### Exercice 12.1 (☹☹)

Soit  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbf{R}$  et de carré intégrable sur  $I$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  la matrice définie par

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad [A]_{i,j} = \int_I f_i(t) f_j(t) dt.$$

Montrer que l'application  $(X, Y) \mapsto X^\top AY$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  si, et seulement si, la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

### Exercice 12.2 (☹☹)

Soit  $(P_n)$  une suite de  $\mathbf{R}[X]$  telle que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\deg P_n = n$ . Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur  $\mathbf{R}[X]$  rendant la famille  $(P_n)$  orthonormée.

### Exercice 12.3 (☹)

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, une suite  $(x_n) \in E^{\mathbf{N}}$  et  $x \in E$ .

- Supposons  $E$  de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les propriétés
  - $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ,
  - pour tout  $y \in E$ ,  $\langle x_n - x, y \rangle \rightarrow 0$ .
- Montrer que l'équivalence ne demeure pas en dimension infinie.

### Exercice 12.4 (☹☹)

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(1) = 0$ . Montrer que  $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq 4 \int_0^1 t^2 f'(t)^2 dt$ .

### Exercice 12.5 (☹)

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $f, g$  des applications de  $E$  dans  $E$  telles que  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$  pour tous  $x, y \in E$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont des endomorphismes.

### Exercice 12.6 (☹☹)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u : E \rightarrow E$  une application telle que  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  pour tous  $x, y \in E$ .

- Montrer que l'image d'une base orthonormée de  $E$  par  $u$  est une base orthonormée de  $E$ .
- Montrer que  $u$  est un endomorphisme.

### Exercice 12.7 (☹)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u(x), x \rangle = 0$ . Montrer que  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$ .

### Exercice 12.8 (☹)

Considérons  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  muni de son produit scalaire canonique. Montrer que l'orthogonal du sous-espace des matrices diagonales est le sous-espace des matrices à diagonale nulle.



### Exercice 12.9 (👉)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces tels que, pour tous  $i \neq j$ ,  $x \in F_i$ ,  $y \in F_j$ ,  $\langle x, y \rangle = 0$ . Montrer que la somme  $F_1 + \dots + F_p$  est directe.

### Exercice 12.10 (👉👉)

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs unitaires telle que, pour tous  $i \neq j$ ,  $\|x_i - x_j\| = 1$ . Montrer que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre.

### Exercice 12.11 (👉👉👉)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs telle que, pour tous  $i \neq j$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle < 0$ . Montrer que la famille  $(x_1, \dots, x_{p-1})$  est libre.

## Familles orthogonales

### Exercice 12.12 (👉)

Soit  $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$  et que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe  $P_n \in \mathbf{R}_n[X]$  tel que  $\varphi^{(n)} : x \mapsto P_n(x)e^{-x^2}$ .
2. Montrer que  $(P_n)$  est une famille orthogonale pour le produit scalaire défini par  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\varphi(t) dt$ .
3. Montrer, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , que  $P_n$  admet  $n$  racines réelles distinctes.

### Exercice 12.13 (👉👉)

Soit  $E = \mathbf{R}_n[X]$  muni du produit scalaire défini, pour tous  $P, Q \in E$ , par  $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , posons  $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$  puis  $L_k : x \mapsto \frac{(-1)^k}{k!} e^x f_k^{(k)}(x)$ .

1. Justifier que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_k$  polynomiale; préciser son degré et son coefficient dominant.
2. Montrer que  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base orthonormée de  $E$ .

### Exercice 12.14 (👉👉)

Soit  $E = \mathbf{R}_n[X]$  muni du produit scalaire défini par  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ . Notons  $(B_0, \dots, B_n)$  la base orthonormalisée par l'algorithme de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de  $E$ , puis, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_k = ((X^2 - 1)^k)^{(k)}$ .

1. Montrer que  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base orthogonale de  $E$ .
2. Montrer que, pour tout  $k \leq n$ , il existe  $\lambda_k \in \mathbf{R}$  tel que  $P_k = \lambda_k B_k$ .

### Exercice 12.15 (👉👉)

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs unitaires de  $E$  telle que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2.$$

Montrer que  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $E$ .

### Exercice 12.16 (👉👉)

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

1. Montrer que, pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ ,

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right).$$

2. En déduire que, si  $\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 < 1$ , alors la famille  $(e_1 + x_1, \dots, e_n + x_n)$  est une base de  $E$ .

### Exercice 12.17 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

1. Montrer que si la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base, alors pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , il existe une famille  $(f_1, \dots, f_n)$  de vecteurs de  $E$  telle que, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $[A]_{i,j} = \langle e_i, f_j \rangle$ .
2. Étudier la réciproque.

### Exercice 12.18 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est orthogonale.

### Exercice 12.19 (☞☞)

Considérons  $\mathbf{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique,  $u, v$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbf{R}^n$  et

$$g: \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (a, b) & \mapsto & \|au + bv\| \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe  $m > 0$  tel que, pour tout  $(a, b)$  vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $g(a, b) \geq m$ .
2. En déduire que, pour tout  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ ,  $g(a, b) \geq m\sqrt{a^2 + b^2}$ .
3. Soit  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$  tels que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Notons  $f: (a, b) \mapsto \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)^2$ . Montrer que  $f(a, b) \rightarrow +\infty$  quand  $\|(a, b)\| \rightarrow +\infty$ .
4. Montrer que  $f$  atteint sa borne inférieure. Interpréter géométriquement ce résultat.

## Projecteurs orthogonaux

### Exercice 12.20 (☞)

Soit  $E$  un espace euclidien.

1. Montrer qu'un projecteur  $p$  de  $E$  est orthogonal si, et seulement si,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$  pour tout  $x \in E$ .
2. Soit  $p, q$  deux projecteurs orthogonaux de  $E$ . Montrer que les valeurs propres de  $p \circ q$  appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$ .

### Exercice 12.21 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux de  $E$ . Montrer que  $p \circ q$  est un projecteur si, et seulement si,  $p \circ q = q \circ p$ .

### Exercice 12.22 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien de base orthonormée  $\mathcal{B}$ ,  $F$  un sous-espace de base orthonormée  $(e_1, \dots, e_p)$  et  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . Montrer que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \sum_{k=1}^p \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_k) \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_k)^\top.$$

### Exercice 12.23 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $F, G$  deux sous-espaces. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux si, et seulement si, pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\|^2 = d(x, F)^2 + d(x, G)^2$ .

## Distance à un sous-espace

### Exercice 12.24 (☞)

Soit  $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  muni du produit scalaire canonique  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$  et le sous-espace

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{R} \right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormée de  $F$ .
2. En déduire la distance à  $F$  de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 12.25 (☞)

Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  muni du produit scalaire canonique  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ .

1. Montrer que, pour tout  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  et tout  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ ,  $\langle S, A \rangle = 0$ .
2. Calculer, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,  $\inf \{ \sum_{i,j} ([M]_{i,j} - [S]_{i,j})^2, S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \}$ .

### Exercice 12.26 (☞)

Soit  $E = \mathbf{R}_3[X]$  muni du produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

Déterminer la distance du polynôme  $X^3 + X^2 + X + 1$  au sous-espace vectoriel  $F = \{P \in E, \langle X^2 - 1, P' \rangle = \langle X, P \rangle\}$ .

### Exercice 12.27 (☞☞)

On admet que l'application  $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  définit bien un produit scalaire sur  $\mathbf{R}_n[X]$ . Posons  $\Pi_0 = 1$ , et, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Pi_k = \prod_{i=1}^k (X + i)$ .

1. Montrer qu'il existe  $p_0, \dots, p_n \in \mathbf{R}$  tels que  $\prod_{i=1}^n (X - i) = \sum_{k=0}^n p_k \Pi_k$ . Préciser  $p_0$ .
2. Montrer que le polynôme  $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$  est orthogonal à  $\text{Vect}(X, \dots, X^n)$ .
3. Calculer la distance de 1 à  $\text{Vect}(X, \dots, X^n)$  puis celle de  $X^n$  à  $\text{Vect}(1, \dots, X^{n-1})$ .

**Exercice 12.28** (☞)

Soit  $a \in \mathbf{R}$ . On munit  $\mathbf{R}_n[X]$  du produit scalaire défini par  $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ .  
Calculer, pour tout  $P \in \mathbf{R}_n[X]$ ,  $\inf\{\|P - Q\|, Q \in \mathbf{R}_n[X], Q(a) = 0\}$ .

**Exercice 12.29** (☞☞)

Soit  $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ . Posons, pour tous  $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ ,  $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ .

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels  $a_0, \dots, a_n$  pour que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  soit un produit scalaire sur  $\mathbf{R}_n[X]$ .
2. Calculer la distance de  $X^n$  au sous-espace  $F = \{P \in \mathbf{R}_n[X], \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$ .

**Exercice 12.30** (☞☞)

Soit  $E$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  muni du produit scalaire défini, pour tous  $f, g \in E$ , par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t) dt.$$

Notons  $U$  l'espace des fonctions  $f \in E$  telles que  $f(0) = f(1) = 0$  et  $V$  l'espace des fonctions  $f \in E$  telles que  $f'' = f$ .

1. Montrer que les sous-espaces  $U$  et  $V$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $E$ .
2. Préciser la projection orthogonale sur  $V$ .
3. Notons, pour  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $E_{a,b} = \{f \in E, f(0) = a, f(1) = b\}$ . Calculer  $\inf\{\int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2 dt, f \in E_{a,b}\}$ .

**Exercice 12.31** (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien. La matrice de Gram des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  est la matrice  $G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j \in [1,n]}$ .

1. Montrer qu'une famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre si, et seulement si, la matrice  $G(x_1, \dots, x_p)$  est inversible.
2. Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  de base  $(x_1, \dots, x_p)$  et  $x \in E$ . Montrer que  $d(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$ .

**Exercice 12.32** (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien de base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que

$$\sum_{k=1}^n d(e_k, F)^2 = n - \dim F.$$

# 13 – Endomorphismes d'un espace euclidien

## Isométries

### Exercice 13.1 (☞)

Soit  $E$  un espace euclidien. Déterminer les endomorphismes  $u \in \mathcal{L}(E)$  tels que, pour tout sous-espace  $F$ ,  $u(F^\perp) = u(F)^\perp$ .

### Exercice 13.2 (☞)

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces d'un espace euclidien  $E$  de même dimension. Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{O}(E)$  tel que  $u(F) = G$ .

### Exercice 13.3 (☞☞)

Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que  $E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ .

### Exercice 13.4 (☞☞)

Considérons  $E$  un espace euclidien. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme tel que, pour tous vecteurs  $x, y \in E$  orthogonaux,  $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $v \in \mathcal{O}(E)$  tels que  $u = \lambda v$ .

### Exercice 13.5 (☞☞)

Considérons  $E$  un espace euclidien. Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  deux endomorphismes tels que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\| = \|v(x)\|$ . Montrer qu'il existe  $w \in \mathcal{O}(E)$  tel que  $u = v \circ w$ .

### Exercice 13.6 (☞☞)

Considérons  $E$  un espace euclidien puis  $u, v \in \mathcal{O}(E)$  tels que  $\frac{1}{2}(u + v) \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que  $u = v$ .

### Exercice 13.7 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $p \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in E$ . Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{O}(E)$  telle que, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u(x_i) = y_i$  si, et seulement si,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle.$$

### Exercice 13.8 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que la multiplicité d'une valeur propre dans le polynôme caractéristique de  $u$  est la dimension du sous-espace propre associé.

### Exercice 13.9 (☞)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $H_1, H_2$  deux hyperplans,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les réflexions associées. Notons  $H_3 = \sigma_2(H_1)$  et  $\sigma_3$  la réflexion associée. Montrer que  $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_3$ .

## Matrices orthogonales

### Exercice 13.10 (☞)

Dénombrer les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures.

**Exercice 13.11** (☞)

Déterminer  $a, b, c \in \mathbf{R}$  tels que la matrice

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & a & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ c & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

soit une matrice orthogonale.

**Exercice 13.12** (☞)

Soit  $a, b$  et  $c \in \mathbf{R}$ ; notons  $\sigma_1 = a + b + c$ ,  $\sigma_2 = ab + bc + ca$  et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice  $A$  est orthogonale si, et seulement si,  $\sigma_2 = 0$  et  $|\sigma_1| = 1$ .

**Exercice 13.13** (☞)

1. Déterminer les couples  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit une matrice orthogonale.

2. Pour un tel couple, déterminer les éléments propres de  $A$ .

**Exercice 13.14** (☞)

Reconnaître les isométries de  $\mathbf{R}^3$  dont les matrices dans la base canonique sont

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.15** (☞)

Déterminer les rotations de  $\mathbf{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est de la forme

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ b & 2 & a \\ a & b & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.16** (☞)

Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}^3$  de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  autour de l'axe dirigé par  $(1, 1, 1)$ .

**Exercice 13.17** (☞☞)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ . Montrer les inégalités suivantes

$$1. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}},$$

$$2. \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| \leq n.$$

## Matrices symétriques

### Exercice 13.18 (☞)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  nilpotente telle que  $A^\top A = AA^\top$ . Montrer que  $A = 0_n$ .

### Exercice 13.19 (☞☞)

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  telle que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ ,  $X^\top SX \geq 0$ .

1. Montrer que, pour tout  $i$ ,  $[S]_{i,i} \geq 0$ .
2. Montrer que, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $[S]_{i,j}^2 \leq [S]_{i,i}[S]_{j,j}$ .
3. En déduire que  $\max\{|[S]_{i,j}|, i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = \max\{|[S]_{i,i}|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ .

### Exercice 13.20 (☞☞)

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  dont toutes les valeurs propres sont positives et  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ . Montrer que  $\text{tr}(SP) \leq \text{tr} S$ .

### Exercice 13.21 (☞☞)

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer qu'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  tel que  $X^\top X = n$ ,  $X^\top MX = \text{tr} M$ .

Indication : introduire la partie symétrique de la matrice  $M$ .

### Exercice 13.22 (☞☞☞)

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ ; notons  $\rho(S) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(S)\}$  et, pour tout vecteur propre  $X$  de  $S$  de norme 1 (pour la norme euclidienne canonique),  $F(S, X) = \inf\{\text{tr}((S - tXX^\top)^2), t \in \mathbf{R}\}$  puis  $m(S)$  la borne inférieure des  $F(S, X)$ . Montrer que  $m(S) = \text{tr}(S^2) - \rho(S)^2$ .

### Exercice 13.23 (☞☞)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer l'équivalence entre les propositions

- $A$  admet une famille libre de  $k$  vecteurs propres,
- il existe une matrice  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  de rang  $k$  et dont toutes les valeurs propres sont positives telle que  $AS = SA^\top$ .

### Exercice 13.24 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $u : E \rightarrow E$  l'application  $u : x \mapsto \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il bijectif?
2. Montrer que  $u$  est symétrique.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $(e_1, \dots, e_n)$  pour que  $u$  soit un projecteur.

### Exercice 13.25 (☞)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $p$  et  $q$  des projecteurs orthogonaux. Montrer que  $\text{Sp}(p+q) \subset [0, 2]$ .

### Exercice 13.26 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien.

1. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Montrer que  $\operatorname{tr} u = \sum_{k=1}^n \langle u(e_k), e_k \rangle$ .
2. Soit  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$  à valeurs propres positives. Montrer que, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ .
3. Soit  $u, v$  deux endomorphismes symétriques à valeurs propres positives. Montrer que  $\operatorname{tr}(u \circ v) \geq 0$ .

### Exercice 13.27 (☞☞)

Une matrice  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer qu'une matrice  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  est définie positive si, et seulement si, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  non nul,  $X^\top S X > 0$ .
2. Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  définie positive. Montrer que  $S^{-1}$  est symétrique définie positive puis que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ ,  $\|X\|^4 \leq X^\top S X \cdot X^\top S^{-1} X$ . Étudier le cas d'égalité.

### Exercice 13.28 (☞)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$ . Montrer que  $u$  est  $k$ -lipschitzien si, et seulement si, toutes les valeurs propres de  $u$  sont de valeur absolue inférieure ou égale à  $k$ .

### Exercice 13.29 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$  de valeurs propres  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  telle que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\langle u(e_k), e_k \rangle = \lambda_k$ . Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(e_k) = \lambda_k e_k$ .

### Exercice 13.30 (☞☞☞)

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ ,  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres et  $(X_1, \dots, X_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres associés.

1. Posons  $V_k = \operatorname{Vect}(X_1, \dots, X_k)$ . Montrer que  $\lambda_k = \max\{X^\top S X, X \in V_k, \|X\| = 1\}$ .
2. Notons  $\mathcal{E}_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  de dimension  $k$ . Montrer que

$$\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{E}_k} \max\{X^\top S X, X \in V, \|X\| = 1\}.$$

Indication : on pourra montrer que, pour tout  $V \in \mathcal{E}_k$ ,  $V \cap V_{k-1}^\perp$  n'est pas réduit à  $0_E$ .

### Exercice 13.31 (☞☞☞)

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  de valeurs propres  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Posons  $\mathcal{A} = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2, \|X\| = \|Y\| = 1 \text{ et } \langle X, Y \rangle = 0\}$  où  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  unitaires et orthogonaux. Montrer que  $(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}) \in \mathcal{A}$ .
2. Montrer que  $\lambda_n - \lambda_1 = 2 \sup\{|X^\top S Y|, (X, Y) \in \mathcal{A}\}$ .

## Matrices antisymétriques

### Exercice 13.32 (☞)

Notons, pour toute matrice  $M$ ,  $\varphi_M : X \mapsto X^\top M X$ . Montrer que toute matrice  $M$  se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique  $S$  et d'une matrice antisymétrique  $A$  puis que  $\varphi_M = \varphi_S$ .

### Exercice 13.33 (☞☞)

Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  à valeurs propres strictement positives. Montrer que  $A + S$  est inversible.



**Exercice 13.34** (☹☹)

1. Montrer que les valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures.
2. Soit  $A$  une matrice n'admettant pas 1 comme valeur propre. Montrer que les matrices  $I_n + A$  et  $(I_n - A)^{-1}$  commutent.
3. Montrer que l'application  $A \mapsto (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$  réalise une bijection de l'espace des matrices antisymétriques réelles dans l'ensemble des matrices orthogonales n'admettant pas  $-1$  comme valeur propre. On précisera la bijection réciproque.

**Exercice 13.35** (☹☹☹)

Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$  inversible.

1. Montrer que  $n$  est pair.
2. Montrer que  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $a \in \mathbf{R}$ .

**Exercice 13.36** (☹☹☹)

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  telle que  $A^\top = A^2$ .

1. Diagonaliser la matrice symétrique  $A^\top A$ .
2. Montrer que  $A$  est orthogonalement semblable à l'une des matrices suivantes :  $0_2, I_2, E_{1,1}$ ,

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.37** (☹☹☹☹)

Montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est antisymétrique si, et seulement si, pour toute matrice  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ ,  $P^{-1}AP$  est à diagonale nulle.

# 14 – Fonctions à valeurs vectorielles

## Dérivabilité des fonctions vectorielles

### Exercice 14.1 (☞)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f : I \rightarrow E$  deux fois dérivable telle que  $t \mapsto \|f(t)\|$  est constante. Montrer que  $t \mapsto \langle f(t), f'(t) \rangle$  est à valeurs négatives.

### Exercice 14.2 (☞)

Soit  $n$  un entier impair et  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  dérivable. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $f'(t) \notin \text{GL}_n(\mathbf{R})$ .

### Exercice 14.3 (☞☞)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que, pour tout  $t \in I$ ,  $|f(t)| = 1$ . Montrer qu'il existe  $\theta : I \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que, pour tout  $t \in I$ ,  $f(t) = e^{i\theta(t)}$ .

### Exercice 14.4 (☞)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\det(f(a), f(b), f'(c)) = 0$ .

### Exercice 14.5 (☞☞)

Soit  $E$  un espace euclidien,  $f : [a, b] \rightarrow E$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \|f'(c)\|$ .

Indication : on pourra introduire la fonction réelle  $\varphi : t \mapsto \langle f(t), f(b) - f(a) \rangle$ .

## Tracés

### Exercice 14.6 (☞☞)

Considérons l'arc paramétré plan défini par  $M : t \mapsto \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$ .

1. Tracer le support de l'arc  $M$ .
2. Soit  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ . Montrer que les points  $M(t_1), M(t_2)$  et  $M(t_3)$  sont alignés si, et seulement si,  $t_1 t_2 t_3 = -1$ .
3. Montrer que les tangentes en trois points de  $M$  alignés recoupent le support de  $M$  en trois points alignés.

### Exercice 14.7 (☞)

Tracer l'arc paramétré plan défini par  $M : t \mapsto \left( \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t} \right)$ .

### Exercice 14.8 (☞)

Considérons l'arc paramétré plan défini par  $M : t \mapsto \left( t - \text{th } t, \frac{1}{\text{ch } t} \right)$ .

1. Tracer le support de l'arc  $M$ .
2. Soit  $t \in \mathbf{R}$ . Donner les coordonnées du point  $N(t)$ , intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à l'arc en  $M(t)$ . Que remarque-t-on pour la longueur  $M(t)N(t)$  ?

### Exercice 14.9 (👉)

Déterminer les droites à la fois tangentes et normales au support de l'arc paramétré  $M : t \mapsto (2t^3, 3t^2)$ .

### Exercice 14.10 (👉👉)

Soit  $M : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$ , régulier ne passant pas par 0. Supposons qu'il existe  $t_0 \in \mathbf{R}$  tel que la distance  $OM(t_0)$  soit égale à  $\min\{OM(t), t \in \mathbf{R}\}$ . Montrer que la tangente à l'arc en  $t_0$  est perpendiculaire à la droite  $(OM(t_0))$ .

### Exercice 14.11 (👉👉)

Considérons les fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^2 : u : \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $v : \theta \mapsto (-\sin \theta, \cos \theta)$ .

1. Calculer les dérivées de  $u$  et  $v$ .

Soit  $p, q$  deux fonctions réelles dérivables. Considérons l'arc paramétré  $M : \theta \mapsto p(\theta)u(\theta) + q(\theta)v(\theta)$ .

2. Déterminer à quelle condition, sur  $p$  et  $q$ , le vecteur-dérivé de  $M$  est colinéaire à  $u$ .

Supposons dorénavant que cette condition n'est pas réalisée.

3. Soit  $\theta \in \mathbf{R}$ . Préciser la distance entre  $M(\theta)$  et le point d'intersection de la tangente à l'arc  $M$  en  $\theta$  et la droite passant par l'origine et dirigée par  $u(\theta)$ .

## Calculs de longueur

### Exercice 14.12 (👉)

Calculer la longueur des courbes des arcs paramétrés suivants :

1.  $M : t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$

2.  $M : t \mapsto ((1 + \cos^2 t) \sin t, \sin^2 t \cos t)$

3.  $M : t \mapsto \left( \int_0^t e^{-u}(1 - \cos u) du, \int_0^t e^{-u} \sin u du \right)$

### Exercice 14.13 (👉👉)

Considérons les fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^2 : u : \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $v : \theta \mapsto (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Soit  $\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que

—  $\rho + \rho'' \geq 0$ ,

— il existe  $a \in \mathbf{R}_+^*$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $\rho(\theta) + \rho(\theta + \pi) = a$ .

Calculer la longueur de la courbe de l'arc paramétré  $M : \theta \mapsto \rho(\theta)u(\theta) + \rho'(\theta)v(\theta)$  sur  $[0, 2\pi]$ .

# 15 – Équations différentielles

## Résolutions pratiques

### Exercice 15.1 (☞)

Montrer que les solutions sur  $] -1, 1[$  de l'équation  $(1 - x^2)y' - xy = 1$  sont développables en série entière.

### Exercice 15.2 (☞☞)

Déterminer la dimension de l'espace des solutions sur  $\mathbf{R}$  de l'équation  $(\cos^3 x)y' + (2 \sin x)y = 0$ .

### Exercice 15.3 (☞☞)

Notons, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $y_n$  l'unique solution de l'équation différentielle  $(n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = 0$  vérifiant les conditions initiales  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ .

- Déterminer  $y_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ; montrer que la suite de fonctions  $(y_n)$  converge simplement sur  $\mathbf{R}_+$ .
- Montrer que, pour tout  $x < 0$ ,  $0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}$ .
- En déduire que la suite de fonctions  $(y_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbf{R}_+$ .

### Exercice 15.4 (☞)

Résoudre l'équation  $y'' + y = \cos^3 x$ .

### Exercice 15.5 (☞)

Résoudre, selon la valeur de  $\lambda$ , l'équation  $y'' + \lambda y' + 4y = e^x$ .

### Exercice 15.6 (☞)

Soit  $(E)$  l'équation différentielle  $y'' + (1 + \frac{2}{x})y' + (1 + \frac{1}{x})y = 0$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

- En posant  $z = xy$ , trouver l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
- Déterminer les solutions prolongeables par continuité sur  $\mathbf{R}_+$ .

### Exercice 15.7 (☞)

Considérons l'équation  $(E) : y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

- Montrer que  $y$  est solution de  $(E)$  si, et seulement si,  $z : x \mapsto e^{-x}y(x)$  est solution d'une équation différentielle plus simple.
- Résoudre  $(E)$ .

### Exercice 15.8 (☞)

Soit  $y$  une solution sur  $\mathbf{R}_+^*$  de l'équation différentielle  $x^2 y'' - 2y = x$ .

Montrer que  $z : t \mapsto y(e^t)$  est solution d'une équation différentielle simple puis en déduire l'expression de  $y$ .

### Exercice 15.9 (☞)

Résoudre l'équation  $2x(1-x)y'' + (2-5x)y' - y = 0$ .

Indication : on pourra chercher les solutions développables en série entière.

## Études quantitatives

### Exercice 15.10 (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et 1-périodique. Montrer que l'équation différentielle  $y' + y = f$  a une unique solution 1-périodique.

### Exercice 15.11 (☹☹)

Déterminer les solutions bornées sur  $\mathbf{R}_+^*$  de  $y' - y = \ln x$ .

### Exercice 15.12 (☹☹)

Considérons l'équation différentielle (E)  $y' - y = \frac{1}{x}$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

1. Montrer que (E) possède une unique solution  $f$  bornée au voisinage de  $+\infty$ .
2. Montrer que  $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ .

### Exercice 15.13 (☹☹)

Montrer que l'équation  $y'' - y = a|x| + b$  admet une unique solution sur  $\mathbf{R}$  dont la courbe représentative admet des asymptotes en  $\pm\infty$ .

## Équations fonctionnelles

### Exercice 15.14 (☹)

Trouver les fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $f'(x) - f(x) = \exp(x) \int_0^1 f(t) dt$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

### Exercice 15.15 (☹☹)

Trouver les fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que  $f''(x) + f(-x) = \cos x + \sin x$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

## Endomorphismes « différentiels »

### Exercice 15.16 (☹)

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme  $u$  de l'espace  $E$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  défini, pour tout  $f \in E$  par  $u(f) : x \mapsto \int_0^1 \inf\{t, x\} f(t) dt$ .

### Exercice 15.17 (☹☹)

Considérons l'endomorphisme  $u(f) : x \mapsto f'(x) + xf(x)$  de l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . Déterminer les éléments propres de  $u$ .

## Systèmes différentiels

### Exercice 15.18 (☞)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= & -y & + & 1 \\ y' &= & x & + & \cos t \end{cases}$$

### Exercice 15.19 (☞)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= & x & + & 2y & + & te^t \\ y' &= & 8x & + & y & + & e^{-t} \end{cases}$$

### Exercice 15.20 (☞)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= & -x & + & 3y & - & 2z \\ y' &= & -3x & + & 5y & - & 2z \\ z' &= & -3x & + & 4y & - & z \end{cases}$$

### Exercice 15.21 (☞)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= & & & 2y & + & 2z \\ y' &= & -x & + & 2y & + & 2z \\ z' &= & -x & + & y & + & 3z \end{cases}$$

### Exercice 15.22 (☞☞)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  non inversible et  $X$  une solution de l'équation  $X' = AX$ . Montrer qu'il existe un hyperplan  $H$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  tel que  $X(t) - X(0) \in H$ , pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

### Exercice 15.23 (☞☞)

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  nilpotente d'ordre  $p$  et  $t \mapsto X(t)$  une solution de l'équation  $X' = NX$ . Montrer qu'il existe  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  tel que, pour tout  $t$ ,  $X(t) \in X_0 + \text{Ker } N^{p-1}$ .

## Inégalités différentielles

### Exercice 15.24 (☞☞)

Soit  $f$  dérivable telle que  $f(0) = 0$  et  $f + f' \leq 1$ . Déterminer le meilleur majorant pour  $f(1)$ .

### Exercice 15.25 (☞☞☞)

Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$  vérifiant  $|f| + |1 + f'| \leq 1$ .

**Exercice 15.26** (☹☹)

Soit  $a, b$  des fonctions continues sur  $\mathbf{R}_+$ ,  $y$  et  $z$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}_+$  telles que  $y(0) = z(0)$  et, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ ,

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \quad z'(x) \leq a(x)z(x) + b(x).$$

Montrer que  $z(x) \leq y(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ .

**Exercice 15.27** (☹☹)

Déterminer les fonctions  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  continues telles que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \leq \int_0^x f(t) dt$ .

**Exercice 15.28** (☹☹)

Soit  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  continues et  $A \geq 0$  tels que, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t) dt$ . En introduisant la fonction  $\varphi : x \mapsto A + \int_0^x f(t)g(t) dt$ , montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right)$ .

**Exercice 15.29** (☹☹)

Soit  $E$  l'espace des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant  $f(0) = f(1) = 0$ .

1. Montrer que  $\|f\| = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$  définit une norme sur  $E$ .
2. Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que  $\|f\|_\infty \leq C\|f\|$  pour tout  $f \in E$ .

# 16 – Fonctions de plusieurs variables

## Régularité

### Exercice 16.1 (☞)

Considérons la fonction  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est continue.
2. La fonction  $f$  admet-elle des dérivées partielles en  $(0, 0)$  ?
3. La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$  ?

### Exercice 16.2 (☞)

Considérons la fonction  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 y}{\sqrt{x^6 + y^4}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier le caractère  $\mathcal{C}^1$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

### Exercice 16.3 (☞)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Considérons la fonction  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbf{R}^2$ .
2. Supposons la fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}$ . Montrer que la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

## Calculs de dérivées

### Exercice 16.4 (☞)

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Calculer  $g''(0)$  pour  $g : x \mapsto f(0, x) + f(x^2, x)$ .

### Exercice 16.5 (☞)

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes

1.  $g_1 : (x, y) \mapsto f(y, x)$ ,
2.  $g_2 : (x, y) \mapsto f(x + y, x - y)$ .



### Exercice 16.6 (☞)

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  et tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $f(x + \lambda, y + \lambda) = f(x, y)$ . Montrer que  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

### Exercice 16.7 (☞☞)

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ ; notons  $E_n$  l'espace vectoriel engendré par fonctions  $(x, y) \mapsto x^i y^j$  avec  $i, j \in \mathbf{N}$  tels que  $i + j \leq n$  puis  $T$  l'application définie par

$$\forall P \in E_n, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad T(P)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta, \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta) d\theta.$$

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E_n$ . Préciser  $\text{Im } T$ .
2. Montrer que  $T \circ T = T$ .
3. Soit  $\Delta$  l'endomorphisme de  $E_n$  défini, pour tout  $P \in E_n$ , par  $\Delta(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ . Déterminer  $\text{Im } T \cap \text{Ker } \Delta$ .

### Exercice 16.8 (☞☞)

Montrer que  $f : (x, y) \mapsto \int_0^\pi \ln(x + y \cos t) dt$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x > |y|\}$  puis calculer  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ .

### Exercice 16.9 (☞☞)

Soit  $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et croissante.

1. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbf{R}_+^*$  et tout  $x \in \mathbf{R}$ , il existe un unique réel  $a(t, x)$  tel que  $x = a(t, x) + u(a(t, x))$ .  
On admet que la fonction  $(t, x) \mapsto a(t, x)$  est continue sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ .
2. Justifier que la fonction  $f : (t, x) \mapsto u(a(t, x))$  est continue sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$  puis calculer  $f(0, x)$  et  $\partial_1 f(t, x) + f(t, x) \partial_2 f(t, x)$ .

## Recherche d'extrema

### Exercice 16.10 (☞)

Chercher les éventuels extrema des fonctions suivantes

- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| 1. $f : (x, y) \mapsto \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ | 3. $f : (x, y) \mapsto x^y - xy$ |
| 2. $f : (x, y) \mapsto x^4 y^3 + \ln(1 + y^4)$        |                                  |

### Exercice 16.11 (☞)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}^2$  par  $f : (x, y) \mapsto x^2 + x^2 y + y^3$ .

1. Montrer que  $f$  admet un point critique qui n'est pas un extremum local.
2. Soit  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Déterminer les extrema de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 16.12 (☞)

Considérons la fonction  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f : (x, y) \mapsto (x - y^2)(x - 2y^2)$ .

1. Montrer que la restriction de  $f$  à toute droite passant par  $(0, 0)$  admet un minimum en ce point.
2. La fonction  $f$  admet-elle un minimum en  $(0, 0)$  ?

### Exercice 16.13 (☞☞)

Soit  $s > 0$ . Déterminer les extrema sur  $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \sum_{k=1}^n x_k = s\}$  de la fonction  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{k=1}^n x_k$ .

## Équations aux dérivées partielles

### Exercice 16.14 (☞☞)

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$  engendré par les fonctions  $f_{i,j} : (x, y) \mapsto x^i y^j$  où  $i, j \in \mathbf{N}$ . Considérons l'application linéaire  $\Phi : f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  définie sur  $E$ .

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Montrer que la famille  $(f_{i,j})_{i,j}$  est libre.
3. Déterminer  $\text{Ker } \Phi$  puis montrer que  $E = \text{Ker } \Phi \oplus F$  avec  $F = \{(x, y) \mapsto xyf(x, y), f \in E\}$ .

### Exercice 16.15 (☞)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles  $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$  sur  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ .

### Exercice 16.16 (☞)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  sur  $(\mathbf{R}_+^*)^2$ .  
Indication : on pourra poser la fonction  $g : (u, v) \mapsto f(u, uv)$ .

### Exercice 16.17 (☞)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .  
Indication : on pourra poser la fonction  $g : (u, v) \mapsto f(u, ve^{-\frac{u^2}{2}})$ .

### Exercice 16.18 (☞)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} = -f$  sur  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ .  
Indication : on pourra poser la fonction  $g : (u, v) \mapsto f(u, u^2 v)$ .

### Exercice 16.19 (☞☞)

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

1. Montrer que l'application  $g : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie  $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ .
2. Montrer que la fonction  $\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  puis calculer sa dérivée.
3. En déduire que si  $f$  admet un minimum local en  $(0, 0)$ , alors  $f$  est localement constante.

### Exercice 16.20 (☞☞)

Trouver les fonctions  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles qu'il existe  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xz, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = f(y)g(z), \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{2}.$$

**Exercice 16.21** (☞☞)

- Déterminer les fonctions  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y$ .
- Résoudre l'équation différentielle  $(x - y)y' + x + y = 0$ .

**Exercice 16.22** (☞☞)

- Déterminer les fonctions  $f : (\mathbf{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbf{R}$  telles que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\ln x + y - 1}{x^2 y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\ln x}{x y^2}$ .
- Résoudre l'équation différentielle  $(x \ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$ .

**Exercice 16.23** (☞☞)

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ . Montrer que  $f$  vérifie la condition

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

si, et seulement si,

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

pour tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

## Surfaces

**Exercice 16.24** (☞)

Soit  $\Sigma$  la surface de  $\mathbf{R}^3$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  et  $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ . Déterminer le plan tangent à  $\Sigma$  en  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**Exercice 16.25** (☞)

Soit  $\Sigma$  la surface de  $\mathbf{R}^3$  d'équation  $2x^2 + 3yz - 4z = 1$ . Déterminer les plans tangents à  $\Sigma$  contenant la droite d'équations  $y = 2$  et  $z = 4x$ .

**Exercice 16.26** (☞)

Soit  $\Sigma$  la surface de  $\mathbf{R}^3$  d'équation  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ . Déterminer les points de  $\Sigma$  d'où le plan tangent est parallèle à la droite d'équations  $y = -2x$  et  $z = 0$ .

**Exercice 16.27** (☞)

Soit  $\Sigma$  la surface de  $\mathbf{R}^3$  d'équation  $xyz = 1$  et  $\mathcal{P}$  un plan tangent à  $\Sigma$  en un point  $M$  de  $\Sigma$ . Notons  $A, B, C$  ses intersections de  $\mathcal{P}$  avec les axes  $(Ox), (Oy)$  et  $(Oz)$ . Montrer que la quantité

$$\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$$

ne dépend pas du point  $M$ .