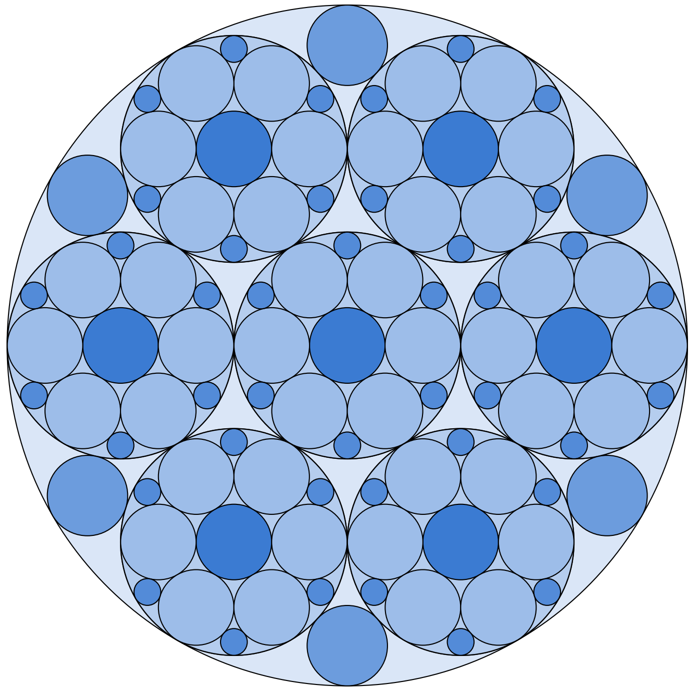
Exercices



Ce document, propriété de , rassemble des exercices pour l'ensemble de l'année en MPSI$_2$. Tous ne seront pas forcément corrigés en classe ; beaucoup sont difficiles et il est nécessaire d'y passer un temps conséquent de recherche active après avoir appris son cours.
Certains exercices plus originaux sont signalés avec le symbole ; d'autres plus standards sont placés sur un fond coloré.

En complément de ce polycopié, on peut tester son apprentissage du cours avec les questionnaires Vrai/Faux disponibles sur la page `www.rogermansuy.fr/HX2/`

Faire et non pas subir, tel est le fond de l'agréable.

Alain, *Propos sur le bonheur*

Le signe du progrès véritable en toute action est le plaisir qu'on y sait prendre. D'où l'on voit que le travail est la seule chose délicieuse, et qui suffit. J'entends travail libre, effet de puissance à la fois et source de puissance.

Alain, *Propos sur le bonheur*

Les minutes, mortel folâtre, sont des gangues
Qu'il ne faut pas lâcher sans en extraire l'or !

Baudelaire, *Fleurs du Mal*

Gardez-vous bien de prolonger vos plaintes, car, ainsi que l'a dit le rhéteur Apollonius, rien ne sèche plus vite que les larmes.

Cicéron, *De l'invention oratoire*

Il n'y a qu'une façon d'échouer, c'est d'abandonner avant d'avoir réussi.

attribué à George Clemenceau

Tenter, braver, persister, persévérer, être fidèle à soi-même, prendre corps à corps le destin, étonner la catastrophe par le peu de peur qu'elle nous fait, tantôt affronter la puissance injuste, tantôt insulter la victoire ivre, tenir bon, tenir tête.

Victor Hugo, *Les misérables*

Travaillez, prenez de la peine :
C'est le fonds qui manque le moins.
Un riche Laboureur, sentant sa mort prochaine,
Fit venir ses enfants, leur parla sans témoins.
Gardez-vous, leur dit-il, de vendre l'héritage
Que nous ont laissé nos parents.
Un trésor est caché dedans.
Je ne sais pas l'endroit ; mais un peu de courage
Vous le fera trouver, vous en viendrez à bout.
Remuez votre champ dès qu'on aura fait l'Oût.
Creusez, fouillez, bêchez ; ne laissez nulle place
Où la main ne passe et repasse.
Le père mort, les fils vous retournent le champ
Deçà, delà, partout ; si bien qu'au bout de l'an
Il en rapporta davantage.
D'argent, point de caché. Mais le père fut sage
De leur montrer avant sa mort
Que le travail est un trésor.

Jean de La Fontaine, *Fables*

Tenez-vous à l'écart des gens qui freinent vos ambitions. Les petits esprits font toujours cela. Les plus grands esprits seuls vous font sentir que vous aussi, pouvez devenir grand.

attribué à Mark Twain

Chapitre 1

Préliminaires

Exercice 1.1

Placer dans chaque affirmation le symbole adapté parmi $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ (si cela est possible).

1. *Soit* $x \in \mathbb{N}$.
$$x \geq 1 \qquad\qquad x > 0$$
2. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$.
$$x = y \qquad\qquad x^2 = y^2$$
3. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$.
$$x^3 = y^3 \qquad\qquad x^2 = y^2$$
4. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$.
$$x^4 = y^4 \qquad\qquad x^2 = y^2$$
5. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}_+$.
$$x = y \qquad\qquad x^2 = y^2$$
6. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$.
$$x^2 + y^2 = 0 \qquad\qquad x = y$$
7. *Soit* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
$$x = y \qquad\qquad xz = yz$$
8. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$.
$$|x| + |y| = 0 \qquad\qquad |x + y| = 0$$
9. *Soit* $x \in \mathbb{R}$.
$$x^2 < x \qquad\qquad x < 1$$
10. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$.
$$x < y \qquad\qquad x^2 < y^2$$
11. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$.
$$x < y \qquad\qquad |x - 1| < |y - 1|$$

Exercice 1.2

Un entier naturel n est un palindrome si la lecture de gauche à droite de son écriture décimale donne le même résultat que la lecture de droite à gauche. Déterminer les affirmations correctes parmi les suivantes

1. *Les multiples de 11 sont des palindromes.*
2. *Les multiples de 11 à 2 chiffres sont des palindromes.*
3. *Les multiples de 11 à 3 chiffres sont des palindromes.*
4. *Les palindromes à 2 chiffres sont des multiples de 11.*
5. *Les palindromes à 3 chiffres sont des multiples de 11.*
6. *Les palindromes à 6 chiffres sont des multiples de 11.*

Exercice 1.3

Nier les propositions suivantes

1. *Si vous n'apprenez pas le cours, vous n'aurez pas de bons résultats.*
2. *Vous faites du sport et des mathématiques.*
3. $(P \wedge Q) \ \Rightarrow\ R$.
4. $(P \wedge Q) \ \Rightarrow\ (R \wedge Q)$.
5. $P \ \Rightarrow\ (Q \vee R)$.
6. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{N},\qquad (n^2 - 1 = 4k) \vee (n^2 = 4k)$.
7. $\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]a - \eta, a + \eta[,\qquad |f(x)| \geq A$.

Exercice 1.4

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Écrire les propositions avec quantificateurs pour

1. *f n'est pas une fonction constante.*
2. *f prend des valeurs arbitrairement grande.*
3. *f s'annule au plus une fois.*
4. *f admet un maximum global.*

I came as a king, I left as a legend

Exercice 1.5

Dessiner l'allure de la courbe représentative de $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ *telle que*

- ▷ $\forall x \in [0,1[,\ \exists M > 0,\ f(x) \leq M$.
- ▷ $\forall x \in [0,1[,\ \exists y, z \in [x,1[,\ f(y) < f(x) < f(z)$.

Exercice 1.6

Soit x_1, x_2, ..., $x_n \geq 1$. *Montrer que*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq n - 1 + x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Exercice 1.7

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, u_k *le plus grand diviseur impair de* k. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n} = n^2.$$

Exercice 1.8

Définissons, pour tout entier $n \geq 3$, *la propriété* $\mathcal{P}_n$:

il existe un n*-uplet* $(u_1, \ldots, u_n)$ *d'entiers strictement positifs tel que* $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ *et* $1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$.

1. (a) *Supposons qu'il existe un triplet* (u_1, u_2, u_3) *tel que* $u_1 < u_2 < u_3$ *et*

$$1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}.$$

   i. *Montrer que* $u_1 < 3$; *en déduire la valeur de* u_1.

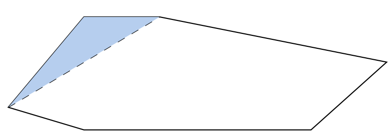
   ii. *Trouver les valeurs de* u_2 *et* u_3.

   (b) *En déduire qu'il existe un unique triplet* (u_1, u_2, u_3) *vérifiant* $\mathcal{P}_3$.

2. *En s'inspirant de la question précédente, montrer que* $\mathcal{P}_4$ *est vraie et trouver tous les quadruplets correspondants.*
3. *Démontrer* $\mathcal{P}_n$ *pour tout* $n \geq 3$.

Exercice 1.9

Soit $n \geq 3$. *Montrer que la somme des angles d'un* n*-gone convexe est* $(n-2)\pi$.



Exercice 1.10

1. *Calculer* $s_k = k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
2. *Remarquer la valeur de* $s_k - s_{k+4}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
3. *En déduire que, pour tout entier* n, *il existe une infinité d'entiers* p *et des suites* $(\varepsilon_k)_{k \leq p} \in \{\pm 1\}^p$ *tels que* $n = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_p p^2$.

Exercice 1.11

Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ *la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout* $n \geq 1$,

$$p_n \leq 2^{2^{n-1}}.$$

On pourra utiliser la preuve d'Euclide de l'infinité des nombres premiers.

Exercice 1.12

Une suite réelle $(u_n)_n$ *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, p \geq N, \qquad |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

1. *Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.*
2. *Écrire la négation de la définition de suite de Cauchy.*
3. *Comparer cette définition avec la suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, p \geq N, \qquad |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

4. *Comparer cette définition avec la suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Exercice 1.13

Considérons les deux propositions suivantes pour une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

▷ f *admet une limite finie en* a *si*

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \qquad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

▷ f *tend vers* $+\infty$ *en* a *si*

$$\forall A > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \qquad f(x) \geq A.$$

Montrer, par contraposition ou par l'absurde, que si f *admet une limite finie en* a, *alors* f *ne tend pas vers* $+\infty$ *en* a.

Chapitre 2

Ensembles et applications

Exercice 2.1

Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un même ensemble E. La limite supérieure de cette suite, notée $\limsup A_n$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à une infinité de termes de la suite.

1. *Écrire cette définition avec une phrase quantifiée.*
2. *Écrire cette définition avec les opérations ensemblistes.*

Exercice 2.2

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Résoudre l'équation $A \cap X = B$ puis l'équation $A \cup X = B$.

Exercice 2.3

Montrer que dans toute famille finie de parties d'une ensemble E, il en existe une qui n'en contient aucune autre.

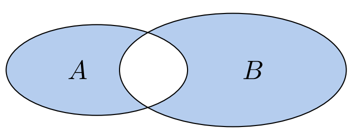
Exercice 2.4 (*point fixe de Knaster-Tarsky*)

Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante pour l'inclusion. Montrer qu'il existe une partie $X \subset E$ telle que $f(X) = X$. On pourra considérer la réunion de toutes les parties de E incluses dans leur image par f.

Exercice 2.5

Soit E un ensemble. La différence symétrique de deux parties A et B de E est

$$A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$



1. *Montrer que, pour toutes parties A et B, $A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$.*
2. *Vérifier que, pour toutes parties A et B, la fonction indicatrice de $A \Delta B$ est égale à*
$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.$$
Retrouver le résultat de la question précédente.
3. *Montrer que Δ est une loi de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$ associative, commutative, d'élément neutre $\varnothing$ et telle que toute partie admette un symétrique.*
4. *Montrer que la loi $\cap$ est distributive sur Δ.*

Exercice 2.6

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E et D la partie des éléments appartenant exactement à deux des parties A, B, C. Calculer l'indicatrice $\mathbb{1}_D$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$.

Exercice 2.7

Soit A et B deux parties de E. Définissons

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$*
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit surjective.*
3. *On suppose que φ est bijective. Calculer φ^{-1}.*

Exercice 2.8

Montrer que $(n,p) \mapsto (2n+1)2^p$ réalise une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 2.9

Soit $f : n \mapsto 2n$ et $g : n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$. Étudier l'injectivité et la surjectivité des $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ des applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2.10

Soit f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $k \mapsto f(k)g(k)$ n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2.11

Exhiber des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f\circ g$ est injective mais f non injective.

Exercice 2.12

Soit $f:E\to E$ telle qu'il existe un entier $n\geq 2$ pour lequel $f^n=f$. Rappelons que f^n désigne la composé n-ième de f.

1. *Montrer que f est injective si, et seulement si, f est bijective.*
2. *Déterminer les applications f injectives dans le cas $n=2$.*

Exercice 2.13

Soit E un ensemble et $f:E\to E$. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A et B de E, $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

Exercice 2.14

Soit $f:E\to F$, $A\subset E$ et $B\subset F$. Montrer que $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$.

Exercice 2.15

Soit $f:E\to F$ Posons

$$\Phi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F)\\ A & \mapsto & f(A)\end{array}\right.\qquad \Psi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E)\\ B & \mapsto & f^{-1}(B)\end{array}\right.$$

1. *Montrer que f est injective si, et seulement si, Φ est injective.*
2. *Montrer que f est injective si, et seulement si, Ψ est surjective.*
3. *Trouver des analogues pour f surjective.*

Exercice 2.16 ( )

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injective et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ surjective telles que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad f(n)\leq g(n).$$

Montrer que $f=g$.

Exercice 2.17

Soit $f:F\to E$ et $g:G\to E$ deux applications.

1. *Montrer qu'il existe une application $h:G\to F$ telle que $g=f\circ h$ si, et seulement si, $g(G)\subset f(F)$.*
2. *À quelle condition cette application h est-elle unique ?*

Exercice 2.18

Soit E et F des ensembles tels que $|E|\geq 3$ et f,g des applications de E dans F. On suppose que

$$\forall x\neq y,\qquad (f(x)=f(y))\vee(g(x)=g(y)).$$

Montrer que f ou g est constante.

Exercice 2.19

Déterminer les réels α tels que la loi de composition interne définie par

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad x\star y=xy+\alpha(x+y)$$

soit associative.

Exercice 2.20

1. *Soit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur les entiers définie par $x\mathcal{R}y$ si $x+y$ est pair. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Est-ce encore vrai avec la relation binaire $\mathcal{R}$ sur les entiers définie par $x\mathcal{R}y$ si $x+y$ est un multiple de 3 ?*

Exercice 2.21

Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$X\mathcal{R}Y\Leftrightarrow X\cup A=Y\cup A$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Décrire la classe d'équivalence de $X\in\mathcal{P}(E)$.*

Exercice 2.22

On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{R}$ par $x\sim y$ si

$$\cos^2 x+\sin^2 y=1.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence puis déterminer ses classes d'équivalence.

Exercice 2.23

On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $u\sim v$ si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists p,q\geq n,\qquad u_p\leq v_n \text{ et } v_q\leq u_n.$$

1. *Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer la classe d'équivalence de la suite constante égale à 1.*

Exercice 2.24

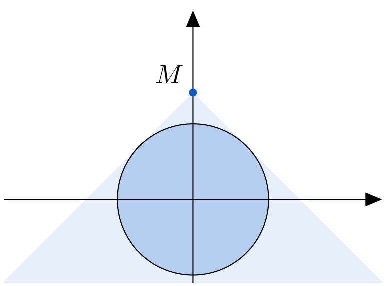
1. *Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que*
$$\forall (a,b) \in A \times B \qquad a \leq b.$$
Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.
2. *Exhiber un exemple de parties A et B telles que $\sup A = \inf B$ et*
$$\forall (a,b) \in A \times B \qquad a < b.$$

Exercice 2.25

Considérons $\prec$ la relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par
$$(x,y) \prec (x',y') \qquad \Leftrightarrow \qquad |x'-x| \leq y'-y.$$

1. *Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre. Est-il total ?*
2. *Montrer que la borne supérieure de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ est $(0,\sqrt{2})$.*

.



Exercice 2.26

Soit $\otimes$ une loi de composition interne commutative et associative sur E, telle que, pour tout $x \in E$, $x \otimes x = x$. Définissons la relation $\prec$ sur E par
$$x \prec y \Leftrightarrow x \otimes y = x.$$

1. *Reconnaître $\prec$ lorsque $\otimes$ est l'intersection sur $\mathcal{P}(X)$.*
2. *Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre.*
3. *Montrer que*
$$\forall\ x,y \in E, \qquad x \otimes y = \inf(x,y).$$

Exercice 2.27

Soit E un ensemble ordonné tel que, pour tous x, $y \in E$, $\sup(x,y)$ et $\inf(x,y)$ existent.

1. *Montrer que $\sup$ et $\inf$ sont des lois de composition internes associatives.*
2. *À quelle condition admettent-elles des éléments neutres ?*
3. *Soit x, $y \in E$. Montrer que*
$$\sup(x, \inf(x,y)) = \inf(x, \sup(x,y)) = x.$$
4. *Soit x, y, $z \in E$ tels que $x \leq z$. Montrer que*
$$\sup(x, \inf(y,z)) \leq \inf(\sup(x,y), z).$$

Chapitre 3

Nombres complexes

Exercice 3.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les complexes $(i-\sqrt{3})^n$ et $(1+i\tan\theta)^n$ pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3.2

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i)^n \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3.3

Déterminer la partie réelle de $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{15}$.

Exercice 3.4

Résoudre l'équation $z^2 - 2z + i = 0$.

Exercice 3.5

Résoudre l'équation $(1+i)z^2 - z - 1 + i = 0$.

Exercice 3.6

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$.

Exercice 3.7

Résoudre l'équation $z^3 + (i-2)z^2 + (3-3i)z + 2i - 2 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

Exercice 3.8

Soit $a,\ b \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $z^2 = 4ab + 2i(a^2 - b^2)$.

Exercice 3.9

Soit $n \geq 1$. Résoudre l'équation $z^n = \overline{z}$.

Exercice 3.10

Résoudre l'équation $1 + \overline{z} = |z|$.

Exercice 3.11

Résoudre l'équation $\mathfrak{Re}(z^3) = \mathfrak{Im}(z^3)$.

Exercice 3.12

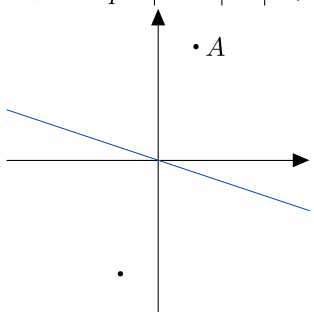
Soit $\alpha \in \backslash\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que les complexes z vérifiant l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \alpha$ sont tous réels si, et seulement si, $|\alpha| = 1$.

Exercice 3.13

Montrer que, pour tout $z \in$, $|z-1| \leq |z-j| + |z-j^2|$.

Exercice 3.14

Soit $a \in^*$. Déterminer les $z \in$ tels que $|z-a| = |z+a|$.



Exercice 3.15

Soit $a,\ b \in$. Montrer que $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$.
Étudier le cas d'égalité puis interpréter cette inégalité pour les longueurs remarquables d'un parallélogramme.

Exercice 3.16

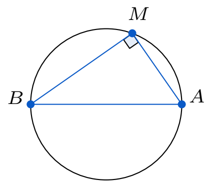
Soit a, b, c et d des complexes de module 1. Montrer que $|ab-cd| \leq |a-c| + |b-d|$.

Exercice 3.17

Déterminer l'ensemble des complexes s'écrivant comme somme de trois complexes de module 1.

Exercice 3.18

Soit $z \in$. *Calculer* $|z-1|^2+|z+1|^2$ *puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*



Exercice 3.19

Soit z *et* z' *des complexes de module au plus* 1. *Montrer que*

$$\min(|z+z'|, |z-z'|) \leq \sqrt{3}.$$

Exercice 3.20 ( )

Soit $z_1, \ldots, z_n \in$ *et*

$$M = \sup\left\{|\epsilon_1 z_1 + \epsilon_2 z_2 + \ldots + \epsilon_n z_n|\,,\ (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n\right\}.$$

Montrer que $|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| \leq 2M$.

Exercice 3.21

Soit $z \in$ *de module* 5 *et de partie imaginaire positive tel que la distance entre* $(1+2i)z^3$ *et* z^5 *est maximale. Calculer* z^4.

Exercice 3.22

Soit $a, b, c \in$ *deux à deux distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes*

i. *les points d'affixes* a, b, c *forment un triangle équilatéral ;*

ii. j *ou* j^2 *est solution de* $az^2+bz+c=0$ *;*

iii. $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$ *;*

iv. $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 3.23

Soit $u, v, w \in$ *tels que* $u+v+w=0$. *Montrer que* $u = jv = j^2 w$ *ou* $u = jw = j^2 v$.

Exercice 3.24

Considérons l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \setminus\{-1\} & \to & \setminus\{0\} \\ z & \mapsto & \frac{2}{z+1} \end{array} \right.$$

Déterminer $f(\mathbb{U})$.

Exercice 3.25

Considérons l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \setminus\{0\} & \to & \setminus\{1\} \\ z & \mapsto & 1+\frac{1}{z} \end{array} \right.$$

Déterminer l'image par f *de la droite formée des complexes de partie réelle* 1, *puis l'image de l'axe des abscisses privé de l'origine.*

Exercice 3.26

Soit $P = \{z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ *et* $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

1. *Soit* $z \in P$. *Montrer que* $\frac{z-i}{z+i} \in D$.
2. *Soit* $z \neq -i$ *tel que* $\frac{z-i}{z+i} \in D$. *Montrer que* $z \in P$.
3. *Montrer que l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} P & \to & D \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array} \right.$$

est une bijection puis calculer sa réciproque.

Exercice 3.27

Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *et* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Montrer que*

$$\frac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad |u| = 1.$$

Chapitre 4

Manipulations algébriques

Exercice 4.1

Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=0}^{n} k(3k+1)$
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$

Exercice 4.2

Calculer par télescopage les sommes $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ *et* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Exercice 4.3

Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

Exercice 4.4

Calculer les sommes

$$\sum_{\substack{k=0\\k=0[3]}}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k}(-1)^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} t^{2k+1}.$$

Exercice 4.5

Soit $x \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Montrer que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{(2+x)^k}{2+kx} \geq 2^n - 1$.

Exercice 4.6

Soit x_1, x_2, ..., $x_n \in \mathbb{R}$ *et* $x_{n+1} = x_1$. *Montrer que* $\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Exercice 4.7

Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ *avec des factorielles.*

Exercice 4.8

Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$.

Exercice 4.9

Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, *la somme* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

Exercice 4.10

Calculer $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)^3$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.11

Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$.

Exercice 4.12

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 4.13

Soit x_1 , ..., x_p *des entiers tels que, pour tout* k, $0 \leq x_k \leq k$ *et* $x_p \neq 0$. *La suite finie* $(x_1, \ldots, x_p)$ *s'appelle l'écriture factorielle de l'entier*

$$n = \sum_{k=1}^{p} x_k k!.$$

Montrer que cette écriture existe et est unique pour tout entier naturel n.

Exercice 4.14

Soit φ l'application qui associe à f dérivable la fonction $x \mapsto xf'(x)$.

1. *Montrer qu'il existe une suite $(a_{k,n})_{k\leq n}$ telle que, pour tout f fonction n fois dérivable,*
$$\forall x, \qquad \varphi^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} x^k f^{(k)}(x).$$
2. *Montrer que, pour tout $0 < k \leq n$, $a_{k,n+1} = ka_{k,n} + a_{k-1,n}$.*

Exercice 4.15

Montrer que
$$\forall p \geq 1, \qquad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}.$$

Exercice 4.16

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$u_{2n} = u_n, \qquad u_{2n+1} = (-1)^n u_n.$$
Calculer $\sum_{k=1}^{1789} u_k u_{k+2}$.

Exercice 4.17

Posons, pour tout $p \leq n$, $S_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}$.

1. *Montrer que pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, $S_p + S_{n-p-1} = 2^n$.*
2. *En déduire $\sum_{p=0}^{n-1} S_p$.*
3. *Montrer que*
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{n-1} (2^n - S_p) = n2^{n-1}.$$

Exercice 4.18

On rappelle l'identité de Vandermonde
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$
Déduire de cette identité l'expression des sommes
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}.$$

Exercice 4.19

Calculer la somme double $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{k}$.

Exercice 4.20

Calculer les sommes doubles $\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} 2^{2k-l}$, $\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \min(k,l)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} |k-l|$.

Exercice 4.21

Soit $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} e^{\frac{2imkl\pi}{n}}$.

Exercice 4.22

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in$, $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ et $M = \max\{|P(z)|,\ z \in \mathbb{U}_n\}$. Montrer que, pour tout k, $|a_k| \leq M$.
On pourra se ramener aux sommes $A_k = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^k$.

Exercice 4.23

Soit $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > 0$ et $z \in$ tels que $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$. Montrer en minorant le module de $(1-z) \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, que $|z| \geq 1$.

Chapitre 5

Corps des réels (topologie)

Exercice 5.1

Soit x, $y \in [0,1]$.

1. *Montrer que $x^2 + y^2 - xy \leq 1$.*
2. *Montrer que $\min(xy, (1-x)(1-y)) \leq \frac{1}{4}$.*

Exercice 5.2

Déterminer les réels x tels que $|x+2| - 2|x| \leq 1$.

Exercice 5.3

Déterminer les réels x et y tels que $(x+y)^+ = x^+ + y^+$.

Exercice 5.4

Déterminer les réels x_1, ..., x_n tels que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Exercice 5.5

Déterminer parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ celles qui sont convexes

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1$ *ou* $|y| < 1\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + 2|y| < 1\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| < 1\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^+ = |y|\}$

Exercice 5.6

Soit $r > 0$. Montrer que $r\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 5.7

Notons, pour tout $r > 0$, $A \subset \mathbb{R}^2$ la réunion des disques (fermés) centrés sur $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ et de rayon $\frac{r}{n}$.

1. *Montrer que si $r \geq \sqrt{2}$, A est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Montrer que si $r < \sqrt{2}$, $(0,0)$ est adhérent à A mais n'appartient pas à A.*

Exercice 5.8

Soit A un ensemble fermé de $\mathbb{R}$.

1. *L'ensemble $\{a+n,\ a \in A, n \in \mathbb{Z}\}$ est-il toujours fermé ?*
2. *Reprendre la question en rajoutant l'hypothèse A borné.*

Exercice 5.9

Soit A un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A est égal à l'ensemble de ses points adhérents.

Exercice 5.10

Soit A, B deux parties disjointes de $\mathbb{R}^n$ telles que A est ouvert. Montrer que A ne contient aucun point adhérent à B.

Exercice 5.11

Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}^n$, posons

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall a \in A,\ [a,x] \subset A\}.$$

1. *Montrer que si A est fermé, alors A^* est fermé.*
2. *Trouver un contre-exemple à l'implication réciproque.*
3. *Calculer A^* pour $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| < 1\}$.*

Exercice 5.12

Soit A et B deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{a+b,\ a \in A, b \in B\}$ est un ouvert.

Chapitre 6

Suites numériques

Exercice 6.1

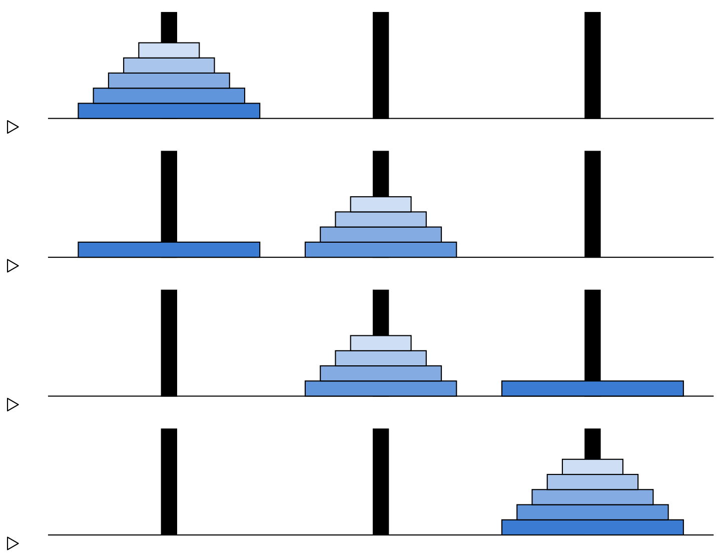
Expliciter les suites définies par

1. $u_0 = -3$ *et, pour tout* n, $u_{n+1} = 2u_n + 7$
2. $u_0 = j + 1$ *et, pour tout* n, $u_{n+1} = ju_n + 1$
3. $u_0 = 0$ *et, pour tout* n, $u_{n+1} = 2u_n + 2^n - n$
4. $u_0 = 0$ *et, pour tout* n, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n + 1$

Exercice 6.2

Le problème des tours de Hanoï consiste à déplacer des disques de tailles différentes entre trois pics de sorte à ce qu'au départ, tous les disques sont sur le premier pic (la taille étant décroissante avec la hauteur) et qu'à l'arrivée, tous les disques sont sur le troisième pic. Les contraintes sont les suivantes

- ▷ *on ne peut déplacer qu'un disque du sommet d'un pic vers le sommet d'un autre pic ;*
- ▷ *on ne peut poser un disque que sur un pic vide ou un pic dont le disque au sommet est de rayon plus grand que celui que l'on pose.*



Notons u_n *le nombre minimal de déplacements pour* n *disques.*

1. *Déterminer une relation de récurrence pour la suite* (u_n).
2. *En déduire la valeur de* u_n.

Exercice 6.3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $(u_n)_n$ *la suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - 2\cos\alpha u_{n+1} + u_n = 0.$$

Donner l'expression de u_n *en fonction de* n.

Exercice 6.4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, a, b, c *des réels non tous nuls. Considérons* E *l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = \alpha^n.$$

1. *Montrer que si* α *n'est pas racine de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, *alors* E *contient une suite géométrique de raison* α.
2. *Montrer que si* α *est racine simple de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, *alors* E *contient une suite de la forme* $(Cn\alpha^n)_n$.
3. *Trouver une suite de* E *dans le cas où* α *est racine double de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$.
4. *Trouver toutes les suites de* E *dans le cas* $a = 1$, $b = c = 4$ *et* $\alpha = -2$.

Exercice 6.5

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *dont les valeurs sont successivement* 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4...*Donner une expression explicite de* u_n *en fonction de* n.

I came as a king, I left as a legend

Exercice 6.6

Soit $(u_n)_n$ *une suite définie par* $u_0 = 1$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) + 2.$$

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *l'expression de* u_n *en fonction de* n.

Exercice 6.7

La suite $(1^n + j^n + j^{2n})_n$ *est-elle convergente ?*

Exercice 6.8

Soit $(u_n)_n$ *une suite telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad 0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 6.9

Soit $(u_n)_n$ *une suite réelle convergente. Est-ce que* $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ *est convergente ?*

Exercice 6.10

Soit $a > 0$. *Étudier la convergence de la suite* $(\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}})_n$.

Exercice 6.11

Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ *et, pour tout* n, $u_{n+1} = u_n^2 \lfloor 1/u_n \rfloor$.

Exercice 6.12

Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles de majorants* ℓ *et* ℓ' *respectivement telles que* $u_n + v_n \to \ell + \ell'$. *Montrer que* $u_n \to \ell$.

Exercice 6.13

Soit $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites telles que* $u_n^2 + v_n^2 + u_n v_n \to 0$.
Montrer que $u_n \to 0$ *et* $v_n \to 0$.

Exercice 6.14

Soit $\lambda > 1$ *et* $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Considérons* $(v_n)_n$ *définie par* $v_n = \lambda u_{n+1} + u_n$.
Montrer que $(u_n)_n$ *converge si, et seulement si,* $(v_n)_n$ *converge.*

Exercice 6.15

Étudier, par inégalités, la convergence des suites définies par

1. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$
2. $v_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3+k}$

Exercice 6.16

La suite $(\sqrt[n]{1789 + (-1)^n})_n$ *est-elle convergente ?*

Exercice 6.17

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. *Étudier la convergence de la suite* $(\binom{3n}{n}\rho^n)_n$.

Exercice 6.18

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. *Déterminer la limite de la suite* $\left(\tan^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{n}\right)\right)_n$.

Exercice 6.19 ( )

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a_1, ..., $a_p > 0$. *Déterminer la limite de la suite* $(u_n)_n$ *définie par*

$$u_n = \sqrt[p]{(n + a_1)\dots(n + a_p)} - n.$$

Exercice 6.20

Soit $(u_n)_n$ *une suite à valeurs strictement positives telles que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que $u_n^{\frac{1}{n}} \to \ell$.

Exercice 6.21

Trouver $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites de limite* 1 *telles que* $u_n^n \not\sim v_n^n$.

Exercice 6.22

Soit $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites équivalentes de limite* $+\infty$. *Montrer que*

$$\ln u_n \sim \ln v_n.$$

Exercice 6.23

Soit $(u_n)_n$ telle que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}.$$

A-t-on $u_n = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$?

Exercice 6.24

Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o(\frac{1}{(n+1)^2}).$$

Déterminer parmi les affirmations suivantes celles qui sont correctes

1. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
2. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
3. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
4. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 6.25

Déterminer un équivalent de u_n où (u_n) est la suite définie par $u_1 = 2$ et $u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$ pour $n \geq 2$.

Exercice 6.26

Déterminer un équivalent des suites suivantes

1. $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$
2. $\cos(\ln(1-\frac{1}{n})) - 1$
3. $\arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan n^\alpha\right)$ *avec* $\alpha > 0$

Exercice 6.27

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution positive que l'on notera x_n.*
2. *Déterminer deux termes du développement asymptotique de x_n.*

Exercice 6.28

Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^5 + nu_n = 1.$$

Étudier cette suite et donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 6.29

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, posons $g_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto nx\ln x - 1$.

1. *Montrer que, pour tout n, g_n admet un unique zéro $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.*
2. *La suite $(u_n)_n$ converge-t-elle ? Déterminer ℓ sa limite.*
3. *Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.*

Exercice 6.30

1. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que l'équation $\sin x \ln(x) = 1$ possède une unique solution dans $]2n\pi, 2n\pi + \pi/2[$, que l'on note u_n.*
2. *Donner un développement asymptotique de u_n.*

Exercice 6.31

Soit $\lambda > 0$. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} = \lambda$ admet une unique solution x_n strictement supérieure à n puis déterminer un équivalent de x_n.

Exercice 6.32

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ qui s'écrivent comme puissance d'exposant au moins 2. Montrer que $u_n = O(\sqrt{n}\ln n)$.

Exercice 6.33 *(lemme de Fekete)*

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive telle que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers

$$\ell = \inf\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

On pourra fixer un entier k et utiliser la division euclidienne de n par k.

Exercice 6.34

Montrer que $D = \left\{2^a 5^b \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.35

Existe-t-il un réel θ *tel que* $\sin(n\theta) \to 1$ *?*

Exercice 6.36

Soit (u_n) *une suite à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *ne tendant pas vers* $+\infty$. *Montrer qu'il existe une sous-suite* $(u_{\varphi(n)})$ *constante.*

Exercice 6.37

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, d_n *le nombre de diviseurs de* n. *Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite* $(d_n)_n$.

Exercice 6.38

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérences des suites (u_n) *définies par*

1. $u_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 2}$
2. $u_n = \frac{(1-(-1)^n)2^n+1}{2^n+3}$
3. $u_n = (\cos \frac{n\pi}{3})^n$
4. $u_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$

Exercice 6.39

Déterminer les valeurs d'adhérence des suites complexes définies par $z_0 = 1$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

1. $z_n = e^{i\pi/n^2} z_{n-1}$,
2. $z_n = e^{i\pi/n} z_{n-1}$.

Exercice 6.40

Considérons la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *par*

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1. *Soit* $p \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $(u_n)_n$ *est croissante pour* $p^2 < n < (p+1)^2$.
2. *Exhiber des suites extraites de* $(u_n)_n$ *de limite* 0 *et* 1.
3. *Montrer que tout réel* $x \in]0,1[$ *est une valeur d'adhérence de* $(u_n)_n$.

Exercice 6.41

Soit $(u_n)_n$ *une suite bornée telle que* $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \to 1$. *Montrer que* $(u_n)_n$ *converge vers une limite que l'on précisera.*

Exercice 6.42

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *bijective. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite* $(\varphi(n))_n$.

Chapitre 7

Fonctions usuelles

Exercice 7.1

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ *est impaire.*

Exercice 7.2 (🔥)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dont la courbe représentative admet deux centres de symétries. Montrer que* f *peut s'écrire comme somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.*

Exercice 7.3

Soit $\alpha > 0$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(x+\alpha)f(x-\alpha).$$

Montrer que f *est périodique.*

Exercice 7.4

Soit f_1, ..., f_n *des fonctions continues et périodiques de somme constante. On suppose qu'aucune sous-famille stricte formée de ces fonctions ne vérifie cette propriété. Montrer que les fonctions admettent une période commune.*

Exercice 7.5

Soit $a \in \mathbb{R}$. *Définissons* $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par*

$$f_a(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x \geq 0, \\ x-a & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Déterminer les réels* a *pour lesquels* f_a *est surjective.*
2. *Déterminer les réels* a *pour lesquels* f_a *est injective.*

Exercice 7.6

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$

La fonction est-elle surjective de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *? injective ? bijective ?*

Exercice 7.7

Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x$.

1. *L'application* f *est-elle injective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *?*
2. *L'application* f *est-elle injective de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 7.8

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *on définit les fonctions partie positive et partie négative de* f *par* $f_+ : x \mapsto (f(x))^+$ *et* $f_- : x \mapsto (f(x))^-$

1. *Montrer que si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* k*-lipschitzienne, alors les fonctions* f_+ *et* f_- *sont aussi* k*-lipschitziennes.*
2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* f_+ *et* f_- *sont* k*-lipschitziennes. Montrer que* f *est* k*-lipschitzienne.*

Exercice 7.9

Montrer que

$$\sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} = 4.$$

Exercice 7.10

Résoudre l'équation

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Exercice 7.11

Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}_+^*$ *de la fonction* $x \mapsto 2^{-x} + 2^{-1/x}$.

Exercice 7.12

Déterminer les $a > 0$ *tels que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $a^x \geq x+1$.

Exercice 7.13

Existe-t-il un entier n tel que les écritures décimales de 2^n et 1515^{1789} soient de même longueur ?

Exercice 7.14

1. *Montrer que, pour tout entier n, 4 divise n^2 ou n^2-1.*
2. *En déduire que, pour tout n, $\lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+3}\rfloor$.*

Exercice 7.15

Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \leq \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x$.

Exercice 7.16

Calculer, pour tout $x \neq \pm\frac{\pi}{4}[\pi]$,

$$\frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} - \frac{1}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}.$$

Exercice 7.17

Déterminer les réels x tels que $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 7.18

Déterminer les réels x tels que $(\cos x)^4 + (\sin x)^6 = 1$.

Exercice 7.19

1. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus 3\pi\mathbb{Z}$, $1+2\cos\frac{2x}{3} = \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{3}}$.*
2. *En déduire la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n}(1+2\cos\frac{2x}{3^k})$.*

Exercice 7.20 ( )

1. *Calculer $\tan\frac{\pi}{12}$.*
2. *Soit t_1, ..., $t_{13} \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe i, $j \in [\![1, 13]\!]$ distincts tels que*

$$0 \leq \frac{t_i - t_j}{1+t_it_j} \leq 2-\sqrt{3}.$$

Exercice 7.21

Résoudre l'équation $5\text{ch}x - 4\text{sh}x = 3$.

Exercice 7.22

Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\ln(1+x\text{th}x) = x$.

Exercice 7.23

Montrer que, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{1}{\text{th}\frac{x}{2}} - \frac{1}{\text{th}x}.$$

En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\text{sh}(2^kx)}$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7.24

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right)$. Montrer que f est dérivable puis que

$$f'(x) = f(\frac{1}{x}).$$

Exercice 7.25

Calculer $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}\right)$.

Exercice 7.26

Calculer $3\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$.

Exercice 7.27

Montrer que le réel $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$ n'est pas rationnel.

Exercice 7.28

Calculer $f(x) = \arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [0, 1]$.

Exercice 7.29

1. *Montrer que $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$.*

2. *En déduire la valeur de*

$$\arctan \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 7.30

On admet l'égalité suivante entre complexes

$$(8+i)^6(57+i)^2(239+i) = 150837781250 + 150837781250i.$$

En déduire la formule

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239}.$$

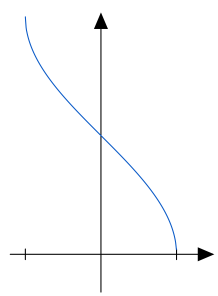
Exercice 7.31

Calculer, en utilisant des arguments de nombres complexes,

$$2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}.$$

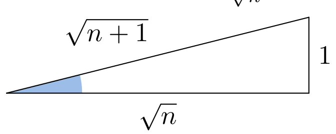
Exercice 7.32 ( )

Justifier que la courbe représentative de arccos *admet un centre de symétrie.*



Exercice 7.33

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.



Exercice 7.34

Déterminer les réels $a > b$ *pour lesquels le système*

$$\begin{cases} \mathrm{ch} x + \mathrm{ch} y = a \\ \mathrm{sh} x + \mathrm{sh} y = b \end{cases}$$

admet des solutions.

Chapitre 8

Équations différentielles

Exercice 8.1

Calculer des primitives des fonctions suivantes

1. $x \mapsto e^x \cos x$
2. $x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$
3. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
4. $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^\alpha}$
5. $x \mapsto \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2}$
6. $x \mapsto \mathrm{sh} x \sin x$

Exercice 8.2

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^{\pi/2} \sin t \cos^3 t \, \mathrm{d}t$
2. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, \mathrm{d}t$
3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^3 t \, \mathrm{d}t$
4. $\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t \, \mathrm{d}t$

Exercice 8.3

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) \, \mathrm{d}t$.
2. $\int_0^1 t \sqrt[3]{1+t} \, \mathrm{d}t$.
3. $\int_0^1 t \sqrt{\frac{1+t}{2+t}} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 8.4

Soit $f : x \mapsto x\lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor^2$. *Calculer* $\int_0^n f(t) \, \mathrm{d}t$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.5

Calculer $\int_0^e f^{-1}(x) \, \mathrm{d}x$ *où* $f : x \mapsto e^x + x - 1$.

Exercice 8.6

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $I_{\alpha,n} = \int_0^1 x^\alpha \ln(x)^n \, \mathrm{d}x$.

Exercice 8.7

Calculer, pour tout $a > 0$,

$$I_a = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \, .$$

Exercice 8.8

Posons

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 + 2\sin(x)\cos(x)}} \, \mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 + 2\sin(x)\cos(x)}} \, \mathrm{d}x \, .$$

1. *Calculer* $I + J$
2. *Montrer que* $I = J$ *et en déduire la valeur de* I.
   On pourra utiliser le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Exercice 8.9

Résoudre l'équation $y' - \arctan(x) y = 0$.

Exercice 8.10

Résoudre les équations homogènes d'ordre 1 suivantes

1. $y' - \cos(x) y = 0$,
2. $(1+x^2) y' + xy = 0$.

Exercice 8.11

Résoudre les équations d'ordre 1 suivantes

1. $y' - 3y = e^{6x}$,
2. $y' - 3y = 2e^{3x}$,
3. $y' - y = x + e^x$.

Exercice 8.12

Existe-t-il une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}_+^*$ *vérifiant* $y' + y = \ln x$ *?*

I came as a king, I left as a legend

Exercice 8.13

Déterminer les fonctions de $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f'(x)+f(x)+\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 8.14

Résoudre l'équation $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

Exercice 8.15

Résoudre les équations homogènes d'ordre 2 suivantes

1. $y'' - 8y' + 15y = 0,$
2. $y'' - \sqrt{3}y' + y = 0.$

Exercice 8.16

Résoudre les équations d'ordre 2 suivantes

1. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x},$
2. $y'' - 4y = x + e^{4x}.$

Exercice 8.17

Trouver les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'équation $y'' + ay' + by = 0$

- ▷ *admet une unique solution de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;*
- ▷ *admet une unique solution telle que $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;*
- ▷ *n'admet que des solutions bornées.*

Exercice 8.18

Résoudre l'équation $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ en se ramenant à une équation d'ordre 2.

Exercice 8.19

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et (E) l'équation $y'' + y = P$.

1. *Montrer que (E) admet une unique solution polynomiale donnée par*

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x).$$

2. *En déduire toutes les solutions de (E).*

Exercice 8.20

Considérons l'équation suivante avec a et b deux fonctions continues

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0.$$

1. *Montrer que, si y est une solution de cette équation qui ne s'annule pas, alors $z = \frac{1}{y}$ est solution d'une équation linéaire.*
2. *Déterminer les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ de $y' + y - xy^2 = 0$.*

Exercice 8.21

Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ en posant $x = \sin t$.

Exercice 8.22

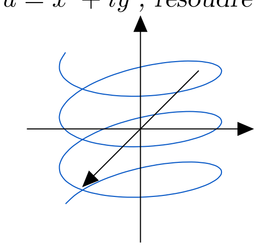
Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $x^2y'' - 2y = x$. Montrer que $z : t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle puis en déduire l'expression de y.

Exercice 8.23

Soit ω un réel strictement positif. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé selon l'axe Oz est régi par le système différentiel (en la variable t) suivant

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

En considérant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.



Exercice 8.24

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $xy' - y = 1 + x^2$.

Exercice 8.25

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $x \mapsto f(x) - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante.

I came as a king, I left as a legend

Exercice 8.26

Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f'(x) = f(a-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.27

Déterminer les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = y(x) + y(-x).$$

Exercice 8.28

Trouver les fonctions f continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - \int_0^x f(x-t)\cos t \,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 8.29

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et non nulle telle que

$$\exists M > 0,\ \forall x \in [0,1], \qquad |f'(x)| \leq M|f(x)|.$$

Montrer que f ne s'annule pas.
Indication : on pourra considérer les fonctions $x \mapsto f(x)^2 e^{\pm 2Mx}$.

Exercice 8.30 (*lemme de Gronwall*)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues et $A \geq 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 8.31 (🔥)

Soit $t_0 < t_1$ et $f : [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive sur $[t_1, +\infty[$. Montrer qu'il n'existe pas de triplet (α, β, γ) tel que $\alpha > 1$, $\beta \geq 1$, $\gamma > 0$ et

$$\forall t \geq t_1, \qquad f(t) \geq \gamma \int_{t_1}^t f(s)^\alpha (s-t_0)^\beta \,\mathrm{d}s\,.$$

Exercice 8.32

Résoudre l'équation fonctionnelle d'inconnue une fonction f dérivable

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x).$$

Chapitre 9

Limites de fonctions, continuité

Exercice 9.1

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists \eta>0,\ \forall y\in[x,x+\eta],\qquad f(y)\geq f(x).$$

Montrer que f est croissante.

Exercice 9.2

La fonction $x\mapsto \lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 9.3

Étudier le comportement en 0 de la fonction $x\mapsto \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \sin x$.

Exercice 9.4

1. *Montrer que, pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que*

$$\tan^{(n)} = P_n\circ\tan\,.$$

2. *Déterminer une relation liant P_{n+1} à P_n.*
3. *Calculer la limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{(n)}(x)}{\tan^{n+1}(x)}$.*

Exercice 9.5

Soit $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction $x\mapsto \lim\limits_{x^+} f$ est croissante.

Exercice 9.6

Montrer que deux fonctions croissantes sur un intervalle ouvert dont la somme est continue sont continues.

Exercice 9.7

Soit z_1, ..., $z_n\in$. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, posons

$$S(\theta)=\{k\in[\![1,n]\!],\ \mathfrak{Re}(z_k e^{-i\theta})\geq 0\}.$$

Montrer que la fonction

$$\theta\mapsto\sum_{k\in S(\theta)}\mathfrak{Re}(z_k e^{-i\theta})$$

est continue.

Exercice 9.8

1. *Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que*

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sup_{t\leq x} f(t)=x.$$

2. *Exhiber une fonction non continue vérifiant cette propriété.*

Exercice 9.9

Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ continue, telle que, pour tout $x>0$, la suite $(f(nx))_n$ est croissante. Montrer que f est croissante.

Exercice 9.10

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ telle que

- $f(a)>f(b)$;
- *il existe $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f+g$ est croissante.*

Montrer que, pour tout $z\in[f(b),f(a)]$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $z=f(c)$.

Exercice 9.11

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $g=\cos\circ f$. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, g admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 9.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et qui admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 9.13

Déterminer la limite en 0 de $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 9.14

Étudier la continuité de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$.

Exercice 9.15

La fonction $x \mapsto \cos(x + \frac{1}{x}) - \cos \frac{1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 9.16

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + f(x - \lfloor x \rfloor)$. Déterminer à quelle condition sur f la fonction g est continue.

Exercice 9.17 ( )

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ croissante telle qu'il existe $\lambda > 1$ vérifiant $\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \underset{+\infty}{\to} 1$. Montrer que, pour tout $\mu > 0$,

$$\frac{f(\mu x)}{f(x)} \underset{+\infty}{\to} 1.$$

Exercice 9.18

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout x, $f(x) = f(\cos x)$.

Exercice 9.19

Soit n réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \ldots + \frac{1}{x - a_n}.$$

Montrer que f s'annule exactement $n - 1$ fois sur son ensemble de définition.

Exercice 9.20

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle I, égales en valeur absolue et ne s'annulant pas. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 9.21

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

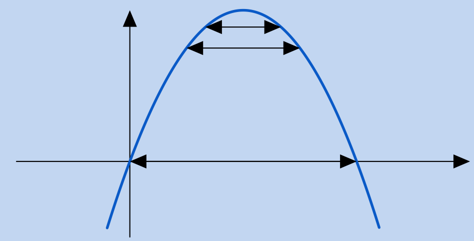
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^2 + (x+1)f(x) + x = 0.$$

Exercice 9.22 (*théorème des cordes universelles*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Définissons

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 1 - \frac{1}{n}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \end{array} \right.$$

1. *Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.*
2. *En déduire qu'il existe $\alpha_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n)$.*



Exercice 9.23

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 9.24

Montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ décroissante continue admet un unique point fixe.

Exercice 9.25

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue en 0 et 1 qui admet en tout $x \in]0,1[$ des limites à droite et à gauche telles que

$$\lim_{x-} f \leq f(x) \leq \lim_{x+} f.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 9.26

Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{card} f^{-1}(\{c\}) \in \{0, 2\}.$$

Exercice 9.27

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 9.28

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue injective telle qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^n(x) = x.$$

Montrer que f ou f^2 est l'identité.

Exercice 9.29

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que

$$\forall x \in [0, 1], \qquad 0 < f(x) < g(x).$$

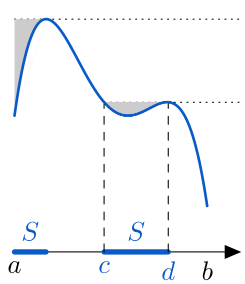
Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que

$$\forall x \in [0, 1],\ Cf(x) \leq g(x).$$

Exercice 9.30 (*lemme du soleil levant*)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $S = \{x \in [a, b],\ \exists y > x,\ f(y) > f(x)\}$.
Soit $c < d$ tels que

- $c \notin S$, $d \notin S$,
- $]c, d[\subset S$.



1. *Montrer que, pour tout $t \in [c, d]$, $f(t) \leq f(d)$.*
2. *En déduire que $f(c) = f(d)$.*

Exercice 9.31

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $x_0 \in [a, b]$ tels que

$$f(x_0) < \sup_{[a, x_0]} f.$$

Montrer qu'il existe $u < x_0$ tel que $\sup_{[a,u]} f = \sup_{[a,x_0]} f$.

Exercice 9.32

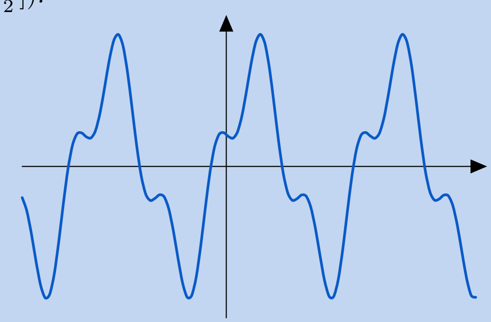
1. *Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [0, 1] \to]0, 1[$ continue et surjective.*
2. *Trouver une fonction $f :]0, 1[\to [0, 1]$ continue et surjective.*

Exercice 9.33

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est infini.

Exercice 9.34

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et continue. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f([a, a + \frac{T}{2}])$.



Exercice 9.35

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f admet une limite finie en b.

Exercice 9.36

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Chapitre 10

Dérivabilité

Exercice 10.1

Soit α, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$.

Exercice 10.2

Montrer que $f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.3

Étudier la dérivabilité sur $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto x^n(1-x)\sin\frac{1}{x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.4

Montrer l'inégalité $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 10.5

Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est bornée par $\frac{1}{2}$.

Exercice 10.6

Soit f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\max(f,g)$ soit dérivable en a.

Exercice 10.7

Soit $\alpha \geq 2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(y)| \geq C|x-y|^\alpha.$$

Montrer que f est dérivable.

Exercice 10.8

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}$ telle que f' possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Déterminer ℓ.

Exercice 10.9

Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et prolongeable par continuité en 0. Supposons que $x \mapsto xf'(x)$ admette une limite ℓ en 0. Déterminer ℓ.

Exercice 10.10

Soit $f ::\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\frac{f(x)}{|x|} \underset{\pm\infty}{\to} +\infty$. Montrer que f' est surjective.

Exercice 10.11

Déterminer la dérivée n-ième de

1. $x \mapsto x^2(1+x)^n$
2. $x \mapsto e^x \cos x$

Exercice 10.12

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie par

$$f(x) = (x-a)^n(x-b)^n.$$

1. *Calculer $f^{(n)}(x)$.*
2. *Trouver, à l'aide du cas $a = b$, une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.*

Exercice 10.13

1. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\varphi(x)$ tel que*

$$\int_x^{\varphi(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. *Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exercice 10.14

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$, $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de limite a.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq x_n$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

1. *On suppose dans cette question que $y_n > a > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $(u_n)_n$.*
2. *On suppose dans cette question f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a. Que dire de la suite $(u_n)_n$?*
3. *Examiner le cas général avec les fonctions $x \mapsto x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ convenablement prolongées.*

Exercice 10.15

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue, dérivable à droite en tout point et telle que $f'_d > 0$. Montrer que f est croissante.

Exercice 10.16

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, dérivable à droite et de dérivée à droite continue. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 10.17

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée majorée par M. Que dire de f si $f(b) - f(a) = M(b-a)$?

Exercice 10.18

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, f' est bornée.

Exercice 10.19

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 10.20

Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que l'équation $e^x = P(x)$ admet au plus $\deg P + 1$ solutions.

Exercice 10.21

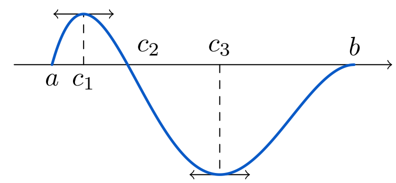
Soit $n \geq 3$, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^n + \alpha x + \beta$ s'annule au plus trois fois.

Exercice 10.22

Soit $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0,a]$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 10.23

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a)f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ tels que $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.



Exercice 10.24

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a \neq b, \qquad f'(c) \neq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Montrer que $f''(c) = 0$.

Exercice 10.25

Soit f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Exercice 10.26

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $x_0 \in [a,b]$. Montrer que le reste de Taylor en x_0 à l'ordre n est

$$\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t_{n+1}} \dots \int_{x_0}^{t_2} f^{(n+1)}(t_1) \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n \mathrm{d}t_{n+1}.$$

Exercice 10.27

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $a_1 < \ldots < a_n$ des éléments de $[a,b]$ et P le polynôme interpolateur de f aux points $(a_i)_{i\leq n}$.
Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(c).$$

On pourra commencer par introduire une fonction

$$g : t \mapsto f(t) - P(t) - A\frac{(t-a_1)\ldots(t-a_n)}{n!}$$

avec A une constante convenablement choisie.

Exercice 10.28

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et paire. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = g(x^2).$$

Exercice 10.29

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' est bornée et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$.

Exercice 10.30

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle qu'il existe M_0 et M_2 des réels vérifiant : $\|f\|_\infty < M_0$ et $\|f''\|_\infty < M_2$. Montrer que $\|f - f''\|_\infty < 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 10.31

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que toutes ses dérivées s'annulent en 0 et il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f^{(n)}(x)| \leq (\lambda x)^n.$$

1. *Montrer que la fonction f est nulle sur $[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$*
2. *En considérant notamment la fonction $x \mapsto f(x + \frac{1}{\lambda})$, montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 10.32

Montrer que

$$\forall x, y > 1, \qquad \ln\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}.$$

Exercice 10.33

Soit p_1, ..., p_n, p'_1, ..., p'_n des réels positifs tels que $\sum p_k = \sum p'_k = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n p'_k \log\frac{p'_k}{p_k} \geq 0.$$

Exercice 10.34

1. *Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.*
2. *Donner un exemple de fonction convexe et majorée sur $]0, +\infty[$ et qui ne soit pas constante.*

Exercice 10.35

Montrer qu'un minimum local d'une fonction convexe est un minimum global.

Exercice 10.36

1. *Étant donné une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ et une fonction g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que $g \circ f$ est convexe.*
2. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors f est convexe.*

Exercice 10.37

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle ouvert. On suppose que, pour tout $a \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$ et $f_{|]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}$ est convexe.

1. *Montrer que f est continue.*
2. *Soit $a \in I$.*
   (a) *Montrer $J = \{x \in I \cap [a, +\infty[,\ f_{|[a,x]} \text{ convexe}\}$ est un intervalle.*
   (b) *Montrer que si $J \neq I \cap [a, +\infty[$, alors J est un segment.*
   (c) *Montrer que si $J = [a,b]$, alors $b \in I$.*
3. *Conclure.*

Chapitre 11

Études locales et asymptotiques

Exercice 11.1

Déterminer la limite en $+\infty$ *de la fonction* $x \mapsto \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 11.2

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha > 0$ *pour que*

$$e^{(x+1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^\alpha}.$$

Exercice 11.3

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $f(x) = 2x\ln(2x+1) - (2x+1)\ln(2x)$.

Exercice 11.4

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $\mathrm{th}x - 1$.

Exercice 11.5

Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sin(\lambda x) \underset{+\infty}{=} o(\sin x)$.

Exercice 11.6

Soit a *et* $b > 0$. *Déterminer un équivalent de* $\ln(\ln(ax+b)) - \ln(\ln(x))$ *en* $+\infty$.

Exercice 11.7

1. *Trouver des réels* a *et* b *tels que*
$$a\sin x + b\tan x \underset{0}{=} x + o(x^4).$$
2. *Trouver des réels* a *et* b *tels que*
$$a\sin x + b\tan x \underset{0}{=} x + O(x^5).$$

Exercice 11.8

Calculer le DL en 0 *des expressions suivantes*

1. $(\cos x)^2$ *à l'ordre* 4
2. $\ln(3+\sin x)$ *à l'ordre* 5
3. $(\cos x - 1)(\mathrm{sh}x - x) - (\mathrm{ch}x - 1)(\sin x - x)$ *à l'ordre* 8
4. $\dfrac{x}{\tan x}$ *à l'ordre* 4
5. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ *à l'ordre* 3,
6. $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *à l'ordre* 5.

Exercice 11.9

Soit f *et* g *des fonctions réelles telles que*

$$f(x) \underset{0}{=} x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4), \qquad g(x) \underset{0}{=} -x^3 + 2x^4 + o(x^6).$$

Déterminer l'ordre maximal auquel on peut développer en 0 *les fonctions* $f+g$, $f \times g$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$ *et* $g \circ f$.

Exercice 11.10

Soit $f : x \mapsto e^{\arctan(x)}$. *Trouver une relation entre* f, f', f'' *puis en déduire le DL à l'ordre* n *en* 0 *de* f.

Exercice 11.11

Posons $f_0 : x \mapsto 1 - x$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = \frac{1}{2-f_n}$. *Déterminer le DL à l'ordre* 5 *en* 0 *de* f_n.
On pourra remarquer que ces fonctions sont des homographies.

Exercice 11.12

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. *Calculer* $f^{(n)}(0)$.

Exercice 11.13

Calculer le coefficient devant $(x-1)^{1789}$ *dans le DL en* 1 *de* $x \mapsto \ln(1+\frac{1}{x})$.

Exercice 11.14

Déterminer le DL en 0 à l'ordre 1000 de $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$.

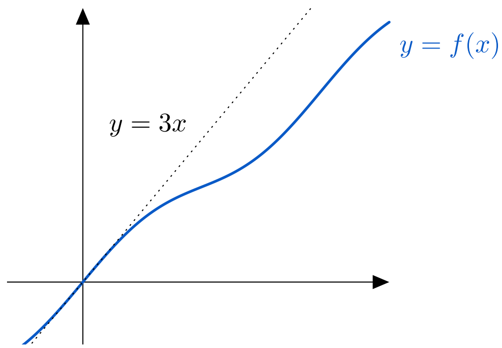
Exercice 11.15

1. *Montrer que la fonction* $f : x \mapsto xe^{x^2}$ *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer un développement limité à l'ordre* 5 *en* 0 *de* f^{-1}.

Exercice 11.16

Soit f *la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 2x + \sin x$.

1. *Montrer que* f *est une bijection de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. *Calculer un DL à l'ordre* 3 *en* 0 *de* f^{-1}.



Exercice 11.17

Soit f *la fonction définie par* $x \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

1. *Montrer que* f *réalise une bijection de* $[e, +\infty[$ *sur* $[e, +\infty[$.
2. *Déterminer un équivalent de* $f^{-1}(x)$ *lorsque* $x \to +\infty$.

Exercice 11.18

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de*

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Exercice 11.19

1. *Établir une relation entre* $\arcsin\sqrt{x}$ *et* $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.
2. *En déduire les trois premiers termes du développement asymptotique de* $\arcsin x$ *en* -1.

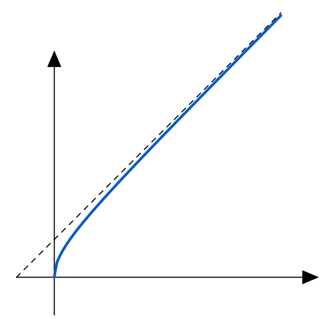
Exercice 11.20

1. *Déterminer un développement asymptotique de* $x \mapsto \sqrt{x^4+x^3+1}$ *à la précision* $\frac{1}{x}$ *en* $+\infty$.
2. *Montrer que l'ensemble* $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2,\ y^2 = x^4 + x^3 + 1\}$ *est fini.*

Exercice 11.21

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ *et étudier la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote pour chacune des courbes données par les équations suivantes*

1. $y = \sqrt{x(x+1)}$,
2. $y = \sqrt[3]{x^3+3x}$,
3. $y = xe^{\frac{1}{x}} \arctan x$.



Exercice 11.22

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une bijection strictement croissante, dérivable telle qu'il existe* $a \neq 0$ *et* $m > n > 1$ *vérifiant*

$$f(x) \underset{0}{=} t^n + at^m + o(t^m).$$

Montrer que f^{-1} *admet le développement limité généralisé*

$$f^{-1}(y) \underset{0}{=} y^{\frac{1}{n}} - \frac{a}{n} y^{\frac{m-n+1}{n}} + o(y^{\frac{m-n+1}{n}}).$$

Chapitre 12

Structures algébriques

Exercice 12.1

Montrer que l'ensemble $G =]-1,1[$ muni de la loi de composition interne définie par $x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}$ est un groupe.

Exercice 12.2

On munit $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la loi définie par

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \qquad (x,y) \times (x',y') = (xx', \frac{y'}{x} + yx').$$

Est-ce un groupe ?

Exercice 12.3

Soit $(G, \times)$ un groupe et $H = \{x \in G,\ \forall g \in G,\ (x \times g)^2 = (g \times x)^2\}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 12.4

Soit $(G, .)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que

$$N = \{g \in G,\ \forall h \in H,\ ghg^{-1} \in H\}$$

est un sous-groupe de G contenant H.

Exercice 12.5

Soit $(G, \times)$ un groupe et A une partie finie de G non vide et stable par $\times$. Montrer que A est un sous-groupe de G.

Exercice 12.6

Soit G un groupe fini et A, B deux parties de G telles que $|A| + |B| > |G|$. Notons $AB = \{ab,\ a \in A,\ b \in B\}$.

1. *Montrer que, pour tout $g \in G$, $A \cap \{gb^{-1}, b \in B\}$ est non vide.*
2. *Montrer que $G = AB$.*

Exercice 12.7

Soit p un nombre premier. Notons $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$ l'ensemble de tous les racines de l'unité dont l'ordre est une puissance de p. Rappelons que l'ordre de $z \in G$ est le plus petit exposant $k > 0$ tel que $z^k = 1$; on admet que z est d'ordre k si, et seulement si, tout élément de $\mathbb{U}_k$ est une puissance de z.

1. *Montrer que G est un sous-groupe infini de $(^*, \times)$.*
2. *Soit H un sous-groupe de G distinct de G, $z_0 \in G \setminus H$ d'ordre p^{n_0}.*
   (a) *Montrer que si H contient un élément d'ordre p^n, alors $\mathbb{U}_{p^n} \subset H$.*
   (b) *Montrer que $H \subset \mathbb{U}_{p^{n_0}}$.*
   (c) *En déduire qu'il existe n tel que $H = \mathbb{U}_{p^n}$*

Exercice 12.8

Soit $(G, .)$ un groupe fini, x et $y \in G$.

1. *Montrer que x et x^{-1} ont le même ordre.*
2. *Montrer que x et yxy^{-1} ont le même ordre.*
3. *Montrer que xy et yx ont le même ordre.*

Exercice 12.9

Montrer que, pour tout sous-groupe H de $(\mathbb{Q}, +)$ de la forme $r_1\mathbb{Z} + r_2\mathbb{Z} + \ldots + r_N\mathbb{Z}$ avec r_1, r_2, ..., $r_N \in \mathbb{Q}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $H = r\mathbb{Z}$.

Exercice 12.10

Un sous-groupe H de G est maximal s'il est distinct de G et n'est contenu dans aucun autre sous-groupe de G que G et H.

1. *$\mathbb{Z}$ admet-il des sous-groupes maximaux ?*
2. *$\mathbb{Q}$ admet-il des sous-groupes maximaux ?*

Exercice 12.11

Soit $(G,\times)$ un groupe fini non abélien, Z son centre et $C=\{(x,y)\in G^2,\ x\times y = y\times x\}$. Montrer que

$$|G|\geq 4|Z|,\qquad |C|\leq \frac{5}{8}|G|^2.$$

On pourra utiliser que, pour tout $x\in G$, $C(x)=\{y\in G,\ x\times y=y\times x\}$ est un sous-groupe de G qui contient Z.

Exercice 12.12

Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}^2,+)$ et $(\mathbb{Q},+)$ ne sont pas monogènes.

Exercice 12.13

Soit G un groupe fini d'ordre $n\geq 2$ et $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Pour tout $g=(g_1,\dots,g_k)\in G^k$, on note

- $\nu(g)=k$,
- *$A(g)$ l'ensemble des produits de la forme $g_{i_1}\dots g_{i_s}$ avec $0\leq s\leq k$ et $1\leq i_1<\dots<i_s\leq k$,*
- $a(g)=|A(g)|$.

Enfin, on note E la réunion des G^k pour $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. *Soit $g\in E$ tel que $A(g)=G$. Montrer que $\nu(g)\geq \log_2 n$.*
2. *Soit $g\in E$. Montrer qu'il existe $x\in G$ tel que, en notant $g'=(g,x)$,*
$$1-\frac{a(g')}{n}\leq\left(1-\frac{a(g)}{n}\right)^2.$$
3. *Montrer qu'il existe $g\in E$ tel que $A(g)=G$ et $\nu(g)\leq\lceil\log_2(n\ln n)\rceil$.*

Exercice 12.14

Notons, pour tout ensemble D de nombres premiers, A_D l'ensemble des rationnels dont le dénominateur est un produit d'éléments de D.

1. *Montrer que, pour tout ensemble D de nombres premiers, A_D est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.*
2. *Montrer que si D et D' sont deux ensembles distincts de nombres premiers, alors A_D et $A_{D'}$ sont distincts.*
3. *Montrer que pour tout sous-anneau B de $\mathbb{Q}$, il existe un ensemble D de nombres premiers tel que $B=A_D$.*

Exercice 12.15

Considérons

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]=\{x+y\sqrt{3},\ (x,y)\in\mathbb{Z}^2\}.$$

1. *Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.*
2. *Considérons l'application $N:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}[\sqrt{3}] & \to & \mathbb{Z}\\ x+y\sqrt{3} & \mapsto & |x^2-3y^2|\end{array}\right.$*

   Établir successivement que

   (a) $\forall z,z'\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}],\quad N(zz')=N(z)N(z')$.

   (b) $\forall z\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}],\quad N(z)=0\Leftrightarrow z=0$.

   (c) $\forall z\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}],\quad N(z)=1\Leftrightarrow z$ *inversible.*

   (d) *L'équation $x^2-3y^2=-1$ n'admet pas de racines entières.*
3. (a) *En déduire qu'un élément inversible $x+y\sqrt{3}$ est strictement supérieur à 1 si, et seulement si, x et y sont strictement positifs.*

   (b) *En déduire ω le plus petit élément inversible strictement supérieur à 1. $\omega=2+\sqrt{3}$.*
4. (a) *Montrer que, pour tout $u\geq 0$ inversible, il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que*
$$\omega^n\leq u<\omega^{n+1},$$
   et montrer que $\omega^{-n}u$ est un inversible dans l'intervalle $[1,\omega[$.

   (b) *Expliciter l'ensemble des éléments inversibles positifs (puis tous les inversibles) de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.*

Exercice 12.16

Montrer que les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$ muni des opérations terme à terme sont de la forme

$$A_n=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ x=y[n]\}$$

avec $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 12.17

Soit E un ensemble non vide.

1. *Montrer que $(\mathcal{P}(E),\Delta,\cap)$ est un anneau.*
2. *Considérons une partition E_1, ..., E_p de E. Montrer que l'ensemble des parties obtenues comme réunions des ensembles E_i est un sous-anneau du précédent.*

Exercice 12.18

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$. Posons

$$\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) = \left\{a + b\sqrt{\alpha}, \quad (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}.$$

1. *Soit $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{\alpha}$.*
2. *Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.*

Exercice 12.19

Montrer que tout idéal I de $\mathbb{Z}^2$ muni des opérations terme à terme est égal à $I_1 \times I_2$ avec

$$I_1 = \{x \in \mathbb{Z},\ (x,0) \in I\},\ I_2 = \{y \in \mathbb{Z},\ (0,y) \in I\}.$$

En déduire que tous les idéaux de $\mathbb{Z}^2$ sont principaux.

Exercice 12.20

Un idéal I d'un anneau commutatif A est premier si, pour tout $(x,y) \in A^2$ tel que $xy \in I$, on a $x \in I$ ou $y \in I$.

1. *Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.*
2. *Montrer que $I = \{f \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0\}$ est un idéal premier de l'anneau $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
3. *Montrer qu'un anneau commutatif où tout idéal est premier est un corps.*

Exercice 12.21

Déterminer tous les sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Exercice 12.22

Soit A_1, ..., A_r, B_1, ..., B_s des anneaux intègres tels que $A_1 \times \ldots \times A_r$ et $B_1 \times \ldots \times B_s$ sont isomorphes.
Montrer, en étudiant l'équation $x^2 = x$, que $r = s$.

Exercice 12.23

Considérons le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo 1 muni de l'addition ordinaire.
Montrer que peu importe la multiplication qu'on voudrait lui mettre, il est impossible d'en faire un anneau.

Exercice 12.24

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0, S un sous-groupe strict de $(\mathbb{K}, +)$ et $x \in \mathbb{K} \setminus S$.

1. *Montrer que si le sous-groupe engendré par S et x est différent de $\mathbb{K}$, il existe S' sous-groupe strict de $(\mathbb{K}, +)$ tel que $S \subset S'$.*
2. *Supposons que le sous-groupe engendré par S et x est égal à $\mathbb{K}$.*
   (a) *Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, $s \in S$ tels que $\frac{x}{2} = kx + s$.*
   (b) *En déduire qu'il existe $a_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $nx \in S$ si, et seulement si, a_x divise n.*
   (c) *Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, $s \in S$ tels que $\frac{x}{a_x} = kx + s$.*
   (d) *En déduire que $x \in S$. Conclure.*

Chapitre 13

Arithmétique des entiers

Exercice 13.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 15 divise $3n^5 + 5n^3 + 7n$.

Exercice 13.2

Déterminer le reste modulo 11 de $42^{42^{42}}$.

Exercice 13.3

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et b non nul. Montrer que la suite des quotients dans la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} est constante.

Exercice 13.4

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 0[9]$.

Exercice 13.5

Déterminer les entiers n tels que $n - 3$ divise $n^3 - 3$.

Exercice 13.6

Déterminer un critère simple de parité pour un entier donné par son écriture en base 3.

Exercice 13.7

Déterminer la valuation 3-adique de l'entier écrit avec n fois le chiffre 1 en base 10.

Exercice 13.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $v_2(5^{2^n} - 1)$.

Exercice 13.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $v_2\left(\prod_{k=n+1}^{2n} k\right)$.

Exercice 13.10

En réduisant modulo un entier bien choisi, montrer que les équations suivantes n'ont pas de solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

1. $x^2 - 4y^2 = 1791$,
2. $x^2 + y^2 = 1791$,
3. $x^2 + 6y^2 = 1112$.

Exercice 13.11

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $a = b[n]$. Montrer que $a^n = b^n[n^2]$.

Exercice 13.12

Pour tout entier n, posons $F_n = 2^n + 1$.

1. *Montrer que si n est impair et différent de 1, alors F_n n'est pas un nombre premier.*
2. *On suppose que n est de la forme $2^q(2k+1)$ avec $k \geq 1$. Montrer que F_n n'est pas un nombre premier.*
3. *En déduire que si F_n est nombre premier, alors n est une puissance de 2.*

Exercice 13.13 ( )

Soit a, b des entiers supérieurs à 1. Montrer que la suite

$$a,\ a^a,\ a^{a^a},\ a^{a^{a^a}}, \ldots$$

est stationnaire modulo b.

Exercice 13.14

Montrer que, pour tous m $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3^m + 3^n$ n'est pas un carré.

Exercice 13.15

Déterminer les nombres premiers dont l'écriture en base 10 comporte en alternance des 0 et des 1 (et donc pas d'autres chiffres).

I came as a king, I left as a legend

Exercice 13.16

Soit k, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $\binom{n}{k}$ est premier si, et seulement si, n est premier et $k \in \{1, n-1\}$.

Exercice 13.17 (🔥)

Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs n'est pas le produit de deux nombres premiers.

Exercice 13.18

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les fractions

$$\frac{15n+4}{10n+3}, \frac{12n+1}{30n+2}, \frac{21n+4}{14n+3}$$

sont irréductibles.

Exercice 13.19

Chercher les couples d'entiers $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

Exercice 13.20

Résoudre le système congruentiel $n = 47[84]$ et $n = 154[189]$.

Exercice 13.21

Soit a et b deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et premiers entre eux.

1. *Montrer que $ab - a - b \notin a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$.*
2. *Montrer que, pour tout $x > ab - a - b$, $x \in a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$.*

Exercice 13.22

Soit a, $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Déterminer $(a + b) \wedge (a \vee b)$.

Exercice 13.23

Soit a et b deux entiers. Montrer que $(a!)^b \vee (b!)^a$ divise $(ab)!$.

Exercice 13.24 (🔥)

Soit a_1, ..., a_n des entiers de pgcd 1. Montrer que les fonctions symétriques σ_1, ..., σ_n de ces entiers sont aussi de pgcd 1.

Exercice 13.25

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs non nuls n'est pas une puissance.

Exercice 13.26

Trouver les entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $3^a 7^b = 1[10]$.

Exercice 13.27

Déterminer le reste de la division de 10^{100} par 247.

Exercice 13.28

Montrer que l'ensemble des nombres premiers congrus à 5 modulo 6 est infini.

Exercice 13.29

Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

Exercice 13.30

Résoudre $x^2 + 6x - 13 = 0$ dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

Exercice 13.31

Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- ▷ *-3 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*
- ▷ *$x^2 + x + 1 = 0$ admet une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*
- ▷ *Il existe un élément d'ordre 3 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$*
- ▷ *$p = 1[3]$*

Exercice 13.32

Soit $n > 1$. Montrer que $2^n \neq 1[n]$.
On pourra considérer p le plus petit diviseur premier de n.

Chapitre 14

Polynômes

Exercice 14.1

Soit P et Q deux polynômes distincts de degré n. Montrer que $P^3 - Q^3$ est nul ou de degré supérieur ou égal à $2n$.

Exercice 14.2

Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que

- *le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$ est $X - 1$;*
- *le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $-X + 2$.*

Exercice 14.3

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Trouver les a, $b \in$ tels que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 14.4

Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(X + \sqrt{3})^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 14.5

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Déterminer $P_n \wedge P_m$.

Exercice 14.6

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes de Tchebytchev T_m et T_n soient premiers entre eux.

Exercice 14.7

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. *Montrer qu'il existe un unique couple (P, Q) de polynômes de degrés strictement inférieurs à n tels que $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$.*
2. *Montrer que $Q(X) = P(1-X)$.*
3. *Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(1-X)P'(X) - nP(X) = \lambda X^{n-1}$.*
4. *En déduire les coefficients de P.*

Exercice 14.8

1. *Montrer que, si A et B sont deux polynômes réels qui sont chacun somme de deux carrés de polynômes, alors il en est de même pour AB.*
2. *Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Déduire de la question précédente qu'il existe deux polynômes à coefficients réels P et Q tels que $A = P^2 + Q^2$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) \geq 0$.*

Exercice 14.9

1. *Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.*
2. *Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.*

Exercice 14.10

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} P = k$.

Exercice 14.11

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non-constant tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n.

Exercice 14.12

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n > 1$. Montrer que $P(\mathbb{Z})$ contient au plus n entiers consécutifs.

Exercice 14.13

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P à coefficients dans $\{0, 1\}$ tel que $P(-2) = n$.

Exercice 14.14

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(k) = k^{1789}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 14.15

Soit $P \in_n [X]$ tel que $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $P(n+1)$.

Exercice 14.16

Déterminer les racines de $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k}(-1)^k X^k$.

Exercice 14.17

Soit $P \in [X]$ non constant.

1. *Pour $z \in$, on note $n(z) = |\{a \in, P(a) = z\}|$. Calculer*
$$\sum_{z\in} (\deg P - n(z)).$$
2. *Soit E une partie finie de . Montrer que*
$$|P^{-1}(E)| \geq (|E| - 1) \deg P + 1.$$

Exercice 14.18

Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires, de degré $n > 0$, à coefficients entiers et à racines complexes dans $\mathbb{U}$ est fini.

Exercice 14.19

Soit $P \in [X]$ un polynôme non constant dont toutes les racines appartiennent au demi-plan d'équation $\mathfrak{Im}(z) > 0$.
Soit A (respectivement B) le polynôme obtenu à partir de P en remplaçant les coefficients par leurs parties réelles (respectivement imaginaires).
Montrer que les polynômes A et B sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14.20

Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que P est scindé à racines simples dans .

Exercice 14.21

Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant unitaire est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $z \in$, $|P(z)| \geq |\mathfrak{Im}(z)|^{\deg P}$.

Exercice 14.22

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $P^2 + \alpha^2$ est scindé à racines simples dans .

Exercice 14.23

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in^n$ et $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $\max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$.

Exercice 14.24

Un polynôme réel est stable si toutes ses racines complexes sont de partie réelle strictement négative.

1. *Montrer que si un polynôme est unitaire et stable, alors ses coefficients sont strictement positifs.*
2. *Soit $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \prod_{1\leq i<j\leq n} (X - \lambda_i - \lambda_j)$. Montrer que P est stable si, et seulement si, les coefficients de P et Q sont strictement positifs.*

Exercice 14.25

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(1 + \sqrt{2}) = 0$. Calculer $P(1 - \sqrt{2})$.

Exercice 14.26

Soit $P \in [X]$ tel que $P(e^{\frac{2i\pi}{n}} X) = P(X)$. Montrer qu'il existe $Q \in [X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.

Exercice 14.27

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Déterminer $P \wedge P'$ en fonction de la décomposition en facteurs irréductibles de P.

Exercice 14.28

Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $1 - T_n$ où T_n est le n-ième polynôme de Tchebytchev.

Exercice 14.29 ( )

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ et $M = \max\{|a_k|,\ 0 \leq k \leq n-1\}$. On suppose de plus qu'il existe un entier $j \geq M + 2$ tel que $P(j)$ premier.
Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

CHAPITRE 15

Fractions rationnelles

Exercice 15.1

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{C}(X)$

1. $\frac{X^4+1}{X^4-1}$
2. $\frac{X^2+1}{X^2(X+1)^2}$
3. $\frac{X^6-2}{(X^2+1)(X-1)^2}$
4. $\frac{1}{X(X-1)\dots(X-n)}$
5. $\frac{1}{X^n(1-X)^n}$

Exercice 15.2

Décomposer en éléments simples la fraction

$$\frac{(X+1)^n-(X-1)^n}{(X+1)^n+(X-1)^n}.$$

Exercice 15.3

1. *Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 7 de $x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2+1}$.*
2. *En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle*
$$\frac{X^3+1}{X^8(X^2+1)}.$$

Exercice 15.4

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que*
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin((2n+1)\theta) = P_n(\sin(\theta)).$$
2. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{P_n}$.*

Exercice 15.5

Déterminer les réels a, b et c tels que la fraction $\frac{aX^2+bX+c}{(X^2-1)^2}$ n'admet pas de terme de degré -1 dans sa décomposition en éléments simples.

Exercice 15.6

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{P'}{P}$ puis en déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k}$.

Exercice 15.7

Soit X_n l'ensemble des complexes z tels que $z^n = -1$.

1. *Calculer*
$$\sum_{z\in X_n} \frac{z}{1-z}.$$
2. *Montrer que, pour tout $P \in_n [X]$,*
$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{z\in X_n} \frac{zP(zX)}{(z-1)^2}.$$

Exercice 15.8

Soit P, Q deux polynômes à coefficients réels tels que Q est de degré $n > 1$, admet n racines réelles distinctes notées $x_1, \dots, x_n$ et que P est de degré strictement inférieur à n.

1. *Justifier que $Q'(x_k) \neq 0$ pour tout $k \leq n$.*
2. *Montrer que $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)(x-x_k)}$.*
3. (a) *En déduire que, si aucune des racines x_k n'est nulle, alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k Q'(x_k)} = -\frac{1}{Q(0)}$.*
   (b) *Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Q'(x_k)}$.*

Exercice 15.9

Soit x_1, ..., x_n des réels deux à deux distincts et $P = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}.$$

Exercice 15.10

Que dire du numérateur et du dénominateur (en écriture irréductible) d'une fraction rationnelle paire ?

Exercice 15.11

Soit $R \in \mathbb{R}(X)$ telle que $R(\frac{X^2}{1+X^2}) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que 1 est un pôle de R.

Exercice 15.12

Déterminer les $R \in (X)$ telles que $R^2 = \frac{X^2}{X+1}$.

Exercice 15.13

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $R \in (X)$ pour que $\deg R' = \deg R - 1$.

Exercice 15.14

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que $P + P'$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.15

Soit $F \in (X)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle, $F(n) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

Exercice 15.16 (*théorème de Gauss-Lucas*)

1. *Soit $P \in [X]$ non constant. Montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P.*
2. *Soit $P \in [X]$ un polynôme non constant et H est un demi-plan de $\mathbb{C}$ tels que $0 \in P'(H)$ (c'est-à-dire que P' admet une racine dans H). Montrer que $P(H) = \mathbb{C}$, c'est-à-dire que la fonction polynomiale associée à P est surjective de H dans .*

Exercice 15.17 ( )

Notons, pour toute fraction $R \in (X)$, P_R l'ensemble de ces pôles. Déterminer les parties $A \subset$ telles qu'il existe $R \in (X)$ vérifiant $A = R(\backslash P_R)$.

Exercice 15.18

Soit $R \in (X)$ qui définit une application injective sur son ensemble de définition. Montrer que R est une homographie.

Chapitre 16

Espaces vectoriels

Exercice 16.1

1. *L'ensemble des suites réelles bornées est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *?*
2. *L'ensemble des suites réelles monotones est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *?*

Exercice 16.2

Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. *l'ensemble des fonctions réelles 1-lipschitziennes ;*
2. *l'ensemble des fonctions réelles* f *telles que*
$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leq k|x|,$$
3. *l'ensemble des fonctions réelles* f *telles que*
$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \geq k|x|.$$

Exercice 16.3

L'ensemble des fonctions réelles qui admettent une période rationnelle non nulle est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *?*

Exercice 16.4

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *posons* $E_a = \{f \in E,\ f(a) = 0\}$.

1. *Montrer, que pour tout* $a \in \mathbb{R}$, E_a *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Soit* $a \neq b$. *Montrer que* $E = E_a + E_b$.
3. *La somme de* E_a *et de* E_b *peut-elle être directe ?*

Exercice 16.5

Soit $E = \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$, F *l'espace des fonctions négligeables devant* x^n *en 0 et* G *l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus* n. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires.*

Exercice 16.6

Soit F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *tels que* $F + G = E$. *Notons* F' *un supplémentaire de* $F \cap G$ *dans* F. *Montrer que* $E = F' \oplus G$.

Exercice 16.7

Soit E *un espace vectoriel et* F, G *et* H *trois sous-espaces vectoriels de* E. *Montrer que la somme* $F + G + H$ *est directe si, et seulement si,* $F \cap G = \{0_E\}$ *et* $(F + G) \cap H = \{0_E\}$.

Exercice 16.8

Soit E *un espace vectoriel,* F, G *et* H *des sous-espaces de* E *tels que* $E = F \oplus G = F \oplus H$. *Montrer que* G *et* H *sont isomorphes.*

Exercice 16.9

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, E_1 *et* E_2 *des sous-espaces de* E *en somme directe.*

1. *Montrer que si* u *est injective, alors* $u(E_1)$ *et* $u(E_2)$ *sont en somme directe.*
2. *Étudier la réciproque.*

Exercice 16.10

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P'(0) = 0\}$ *et* $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}[X])$ *définie par* $u(P) = P(X+1) - 2\,P(X) + P(X-1)$. *Montrer que* u *est un isomorphisme.*

Exercice 16.11

Soit F *un sous-espace vectoriel strict de* E.

1. *Déterminer* $\mathrm{Vect}(E \setminus F)$.

2. *Déterminer tous les endomorphismes s'annulant sur le complémentaire de F.*

Exercice 16.12

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que tout vecteur non nul n'admet pas de coordonnée nulle (dans la base canonique). Montrer F est une droite.

Exercice 16.13

Soit E et E' des espaces vectoriels isomorphes, F un espace vectoriel. Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E',F)$ sont isomorphes.

Exercice 16.14

Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Montrer que $u^{-1}(u(F)) = F + \mathrm{Ker}\ u$.*
2. *Déterminer $u(u^{-1}(F))$.*

Exercice 16.15

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.

Exercice 16.16

Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $(x,y) \mapsto (x, y-u(x))$ est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 16.17

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Établir l'équivalence entre $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^2$ et $\mathrm{Im}\ u \cap \mathrm{Ker}\ u = \{0_E\}$.*
2. *Établir l'équivalence entre $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Im}\ u^2$ et $E = \mathrm{Ker}\ u + \mathrm{Im}\ u$.*

Exercice 16.18

Soit p un projecteur de E. Définissons les sous-espaces

$$F_1 = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \exists u \in \mathcal{L}(E),\ f = u \circ p\},$$
$$F_2 = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \exists u \in \mathcal{L}(E),\ f = u \circ (\mathrm{Id} - p)\}.$$

Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 16.19

Soit E, F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ v \oplus \mathrm{Im}\ u = F$.

Exercice 16.20

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et V, W deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $u(V) \subset u(W)$ si, et seulement si,

$$V + \mathrm{Ker}\ u \subset W + \mathrm{Ker}\ u.$$

Exercice 16.21

Soit a et b deux scalaires distincts et $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$(u - a\mathrm{Id}_E) \circ (u - b\mathrm{Id}_E) = 0.$$

1. *Montrer que $\mathrm{Ker}\ (u - a\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\ (u - b\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.*
2. *Déterminer une expression simple de la projection p sur $\mathrm{Ker}\ (u - a\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ (u - b\mathrm{Id}_E)$*
3. *Montrer que $u = ap + b(\mathrm{Id}_E - p)$. En déduire l'expression de u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 16.22

Soit p et q deux projections sur le même sous-espace G (mais de directions différentes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda) q$ est une projection sur G.

Exercice 16.23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E qui commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}\ (p+q) = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$.

Exercice 16.24

Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E. Expliciter les sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$ suivants

- ▷ $\{u \in \mathcal{L}(E),\ u \circ p = p \circ u\}$,
- ▷ $\{u \in \mathcal{L}(E),\ u \circ p = -p \circ u\}$.

Chapitre 17

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 17.1

Soit α_0, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que $((X-\alpha_k)^n)_k$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 17.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille génératrice de E. Notons

$$I = \{i \in [\![1, n]\!],\ x_i \notin \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{i-1})\}.$$

Montrer que $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Exercice 17.3

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. Définissons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles satisfaisant la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} - (a+b+c)u_{n+2} + (ab+bc+ac)u_{n+1} - abcu_n = 0.$$

1. *Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel et déterminer les suites géométriques de $\mathcal{S}$.*
2. *Montrer que l'application*
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array} \right.$$
est un isomorphisme.
3. *Déterminer une base de $\mathcal{S}$ dans le cas où a, b et c sont deux à deux distincts.*

Exercice 17.4

Soit $n \geq 1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul.

1. *Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.*
2. *En déduire la dimension de F_P en fonction du degré de P.*
3. *Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme premier avec P et tel que*
$$\deg P + \deg Q = n + 1.$$
Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \oplus F_Q$.

Exercice 17.5

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $P = Q(X) - Q(X-1)$.

Exercice 17.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $T : P \mapsto P(X+1)$ et D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $D : P \mapsto P'$.

1. *Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec T.*
2. *Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec D.*

Exercice 17.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n des sous-espaces E_1, ..., E_p, F_1, ..., F_p tels que

- ▷ *pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $F_i \subset E_i$,*
- ▷ $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

Montrer que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $F_i = E_i$.

Exercice 17.8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des sous-espaces F, G, H de E tels que

$$E = F \oplus G = G \oplus H = H \oplus F.$$

Exercice 17.9

Soit $a_0 < a_1 < \ldots < a_N$. Montrer que l'espace E des fonctions continues sur $[a_0, a_N]$, affines par morceaux pour la subdivision $a_0 < a_1 < \ldots < a_N$ est de dimension $N+1$.

Exercice 17.10

Soit E un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie. Montrer que E admet une base échelonnée en degré.

Exercice 17.11

Déterminer le rang de la famille des vecteurs $X_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ dont les coefficients sont 1 en position i, -1 en position j et 0 partout ailleurs.

Exercice 17.12

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_1', \ldots, f_n')$ est de rang au moins $n-1$.

Exercice 17.13

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer

$$\dim\{v \in \mathcal{L}(E,F),\ v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E,F)}\}.$$

Exercice 17.14

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les sous-espaces F_1 et F_2 pour qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u(F_1) = F_2$.*
2. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les sous-espaces F_1, F_2, G_1 et G_2 pour qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u(F_1) = F_2$ et $u(G_1) = G_2$.*

Exercice 17.15

Soit V_1,..., V_p des sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \dim V_k > (p-1)\dim E.$$

Montrer que $\bigcap_{k=1}^{p} V_k \neq \{0_E\}$.

Exercice 17.16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice p, c'est-à-dire tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, et $\Phi : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u\circ v - v \circ u$.

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathcal{L}(E)$,*
$$\Phi^n(v) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k.$$
2. *Montrer que Φ est nilpotente et majorer son indice de nilpotence.*
3. *Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.*
4. *En déduire l'indice de nilpotence de Φ.*

Exercice 17.17

Soit a, $b \in \mathbb{R}$. Considérons l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par

$$u(P) = P + (aX+b)P'.$$

1. *Déterminer à quelle condition sur (a,b) l'endomorphisme u est bijectif.*
2. *Calculer le rang de u.*

Exercice 17.18

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ puis que

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v).$$

Exercice 17.19

Soit u et v deux endomorphismes de rang 1 d'un espace de dimension finie. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leq 1$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, v$ ou $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, v$.

Exercice 17.20 (🔥)

Soit E un espace de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(v \circ u)$.

Exercice 17.21

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. *Préciser le noyau et l'image de l'application linéaire induite par v entre*

les espaces $\mathrm{Im}\,(u)$ *et* E.

2. *Montrer que* $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v \circ u) + \dim \mathrm{Ker}\,(v) \cap \mathrm{Im}\,(u)$.
3. *En déduire que*

$$\dim \mathrm{Ker}\,(v \circ u) \leq \dim \mathrm{Ker}\,(v) + \dim \mathrm{Ker}\,(u)$$

et en particulier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\dim \mathrm{Ker}\,(u^k) \leq k.\dim \mathrm{Ker}\,(u), \qquad \mathrm{rg}(u^k) \geq k.\mathrm{rg}(u) - n(k-1).$$

Exercice 17.22

Soit E *de dimension finie et* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u + v$ *est bijectif.*

1. *Montrer que si* $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, *alors* $\mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v = \dim E$.
2. *Montrer que si* $\mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v = \dim E$, *alors il existe un projecteur* p *tel que*

$$u = p \circ (u+v), \qquad v = (\mathrm{Id} - p) \circ (u+v).$$

Exercice 17.23

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{L}(E)$ *tels que* $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L}(E)$ *et*

$$\forall (u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}, \qquad u \circ v + v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Soit $(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ *tels que* $p + q = \mathrm{Id}$.

1. *Montrer que* p *et* q *sont des projecteurs.*
2. *Soit* $r = \mathrm{rg}(p)$. *Montrer que* $\dim \mathcal{V} \leq (n-r)^2$.
3. *En déduire les sous-espaces* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$.

Exercice 17.24

Soit E *un espace vectoriel de dimension* n. *Un endomorphisme* u *de* E *est cyclique s'il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ *soit une base de* E.

1. *Montrer que si* $u^n = 0$ *et* $u^{n-1} \neq 0$ *alors* u *est cyclique.*
2. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *cyclique. Montrer qu'il existe des scalaires* $(a_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ *tels que*

$$u^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0.$$

Exercice 17.25

Soit E *un espace vectoriel de dimension* n *et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *nilpotent. On admet que la suite* $(\mathrm{Ker}\ u^k)_k$ *est strictement croissante puis stationnaire et que la suite* $(\dim \mathrm{Ker}\ u^{k+1} - \dim \mathrm{Ker}\ u^k)_k$ *est décroissante.*

1. *Montrer que l'indice de nilpotence de* u *est* n *si, et seulement si,* $\dim \mathrm{Ker}\ u = 1$.
2. *Montrer que, si l'indice de nilpotence de* u *est* $n-1$, *alors*

$$\dim \mathrm{Ker}\ u \cap \mathrm{Im}\ u = 1.$$

Exercice 17.26

Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ *laissant stables chacun des axes de coordonnées et la droite engendrée par le vecteur* $(1, 1, \dots, 1)$.

Exercice 17.27

Montrer qu'un sous-espace F *est stable par un endomorphisme* u *de rang* 1 *si, et seulement si,* $\mathrm{Im}\ u \subset F$ *ou* $F \subset \mathrm{Ker}\ u$.

Exercice 17.28

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie* n, H *un hyperplan de* E *et* F *un sous-espace de* E. *Discuter la valeur de* $\dim F \cap H$.

Exercice 17.29

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie,* H_1 *et* H_2 *des hyperplans de* E.

1. *Montrer que* $H_1 \cup H_2 \neq E$.
2. *En déduire que* H_1 *et* H_2 *admettent un supplémentaire commun.*
3. *Montrer que deux sous-espaces de* E *de même dimension admettent un supplémentaire commun.*

Chapitre 18

Matrices

Exercice 18.1

Déterminer la dimension de l'espace des matrices de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telles que la somme sur toute ligne et sur toute colonne est nulle.

Exercice 18.2

Déterminer la dimension de l'espace des matrices $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que les quatres quantités

$$a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3},\ a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3},\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3},\ a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1}$$

sont égales.

Exercice 18.3

Soit A, B et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe λ, μ et $\nu \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda A + \mu B + \nu C$ soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux.

Exercice 18.4

Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est un supplémentaire de l'espace des matrices antisymétriques.

Exercice 18.5

Montrer que l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $m_{i,j} = 0$ pour tout (i,j) tel que $j = i + 1[2]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, stable par produit. Préciser sa dimension.

Exercice 18.6

Calculer JMJ où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice 18.7

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $A(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définies pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{bmatrix}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par produit matriciel.*
2. *Pour quelles valeurs de t, la matrice $A(t)$ admet-elle un inverse dans $\mathcal{M}$?*

Exercice 18.8

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est centrosymétrique si

$$\forall i, j \leq n, \qquad a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}.$$

Montrer que l'ensemble des matrices centrosymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, stable par produit. Déterminer sa dimension.

Exercice 18.9

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que ${}^tMM = M{}^tM$. Montrer que M est diagonale.

Exercice 18.10

Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de la matrice

$$\begin{bmatrix} x + \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & x - \sin\theta \end{bmatrix}$$

Exercice 18.11

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Exercice 18.12

Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices antisymétriques.

Exercice 18.13

Montrer que
$$\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbb{K}[X], P(M) = M^{-1}.$$
Existe-t-il $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $P(M) = M^{-1}$?

Exercice 18.14

Déterminer les réels λ tels qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant ${}^tA = \lambda A$.

Exercice 18.15 ( )

1. *Soit $a > 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle*
   - ▷ $a_{i,j} = a$ *pour tous* $i \neq j$,
   - ▷ $a_{i,i} > a$ *pour tout* i.

   Montrer que A est inversible. On pourra chercher le signe des coordonnées d'un vecteur du noyau de A.
2. *Soit E_1, ..., E_m des parties distinctes de E de cardinal n telles que*
$$\exists a \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall i \neq j, \qquad |E_i \cap E_j| = a.$$
   Montrer que $m \leq n$.
   On pourra considérer la matrice ${}^tBB$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que $b_{i,j} = \mathbb{1}_{i \in E_j}$.

Exercice 18.16

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n()$ et pour tout i, $\ell_i = \sum\limits_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

1. *Montrer que si, pour tout i, $|a_{i,i}| > \ell_i$, la matrice A est inversible.*
2. *Montrer que si, pour tout $i \neq j$, $|a_{i,i}a_{j,j}| > \ell_i\ell_j$, la matrice A est inversible.*

Exercice 18.17

Déterminer les matrices M telles que $M^2 = A$ dans les cas suivants :

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 18.18

Résoudre, pour tout A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation $X + \mathrm{tr}X.A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18.19

Résoudre, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation $X + {}^tX = \mathrm{tr}X.A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18.20

1. *Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in$ deux à deux distincts et $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme*
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n() & \to & \mathcal{M}_n() \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$$
2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n()$ une matrice de trace nulle.*
   (a) *Montrer que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.*
   (b) *Montrer qu'il existe A, $B \in \mathcal{M}_n()$ telles que $M = AB - BA$.*

Exercice 18.21

Calculer les puissances de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $[M]_{i,j} = 1$ si $i = j - 1[n]$ et $[M]_{i,j} = 0$ sinon.

Exercice 18.22

Considérons les matrices $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Calculer $(LC)^k$ et $(CL)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 18.23

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que AB soit nilpotente d'indice p. Montrer que BA

est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p+1$.
Peut-il y avoir égalité ?

Exercice 18.24

Considérons $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \alpha_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{C}_A$ *l'espace des matrices commutant avec* A.

1. *Montrer l'injectivité de l'application linéaire*

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{C}_A & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ (m_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (m_{i,n})_i \end{cases}$$

2. *En déduire que, pour tout* $M \in \mathcal{C}_A$, *il existe* $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *tel que* $M = P(A)$.

Exercice 18.25

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice semblable à une matrice diagonale* $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. *Montrer qu'il existe* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $A = P(A^3)$.

Exercice 18.26

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. *Montrer que* A *est triangulaire supérieure si, et seulement si, pour tout* $k \geq 2$, A^k *est triangulaire supérieure.*

Exercice 18.27

Soit φ *une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\mathrm{tr})$.
Indication : on pourra rappeler le calcul $E_{i,j}E_{k,l}$.

Chapitre 19

Équivalence des matrices

Exercice 19.1

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *peut s'écrire comme la somme d'au plus* n *matrices de rang* 1*. Le résultat est-il encore vrai avec* $n-1$ *?*

Exercice 19.2 ( )

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *telles que*

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. *Montrer que* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$.
2. *En déduire* $BA = \mathrm{I}_2$.

Exercice 19.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer qu'il existe* $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $AUA = A$.
2. *Montrer qu'il existe* $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *telle que* UA *est une matrice de projection.*

Exercice 19.4

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*. Définissons*

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AMB \end{array} \right.$$

Déterminer à quelle condition u *est bijectif.*

Exercice 19.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la colonne* $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *est nulle si, et seulement si,*
$$^tYY = 0.$$
2. *Montrer que* $\mathrm{Ker}\ (^tAA) = \mathrm{Ker}\ (A)$.
3. *En Déduire que* $\mathrm{rg}(^tAA) = \mathrm{rg}(A)$ *puis que* $\mathrm{rg}(A^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 19.6

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{rg}(MJ_{n-1}) = \mathrm{rg}(M) - 1$.

Exercice 19.7

Soit $\diamondsuit$ *la relation binaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *définie par* $A\diamondsuit B$ *si*

$$\exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad A = UBV.$$

Montrer que $A\diamondsuit B$ *si, et seulement si,* $\mathrm{rg}A \leq \mathrm{rg}B$.

Exercice 19.8

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Montrer qu'il existe* U, $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *telles que*

$$\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B).$$

Exercice 19.9 ( )

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *nilpotente d'indice* p*. Montrer qu'il existe* $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ *telles que*

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(C, AC, ..., A^{p-1}C) \oplus \bigcap_{k=0}^{p-1} \mathrm{Ker}\ (LA^k).$$

I came as a king, I left as a legend

Exercice 19.10

Soit a, b et $c \in$. Montrer que le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & b \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & c \end{array}\right.$$

admet au moins une solution si, et seulement si, $c - b = b - a$.

Exercice 19.11

Déterminer les solutions strictement positives du système non-linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{ccc} xyz & = & 1 \\ xy^2z^4 & = & 2 \\ xy^3z^9 & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 19.12

Résoudre, pour $\lambda \in$, le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}\right.$$

Exercice 19.13

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Montrer que le système $AX = B$ est compatible si, et seulement si, $c - b = b - a$.

Exercice 19.14

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & 3x_n & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 19.15

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ 2x & - & 2y & & & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & t & = & 7 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 19.16

Résoudre, pour $\lambda \in$, le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & + & t & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & + & t & = & \lambda + 1 \end{array}\right.$$

Exercice 19.17

Soit a, b, $c \in$ deux à deux distincts. Résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2z & = & c^3 \end{array}\right.$$

Exercice 19.18

Résoudre le système, pour λ, $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & \mu y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda\mu y & + & z & = & \mu \\ x & + & \mu y & + & \lambda z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 19.19

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Trouver α.

Exercice 19.20

Considérons $M=(m_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ vérifiant

- ▷ $m_{i,j}=0$ *si* $i\in\{1,n+2\}$ *ou* $j\in\{1,n+2\}$;
- ▷ $m_{i,j}=\frac{1}{4}(m_{i-1,j}+m_{i+1,j}+m_{i,j-1}+m_{i,j+1})$ *sinon.*

Déterminer M.

Exercice 19.21

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r, $U\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que UA soit échelonnée en lignes.

1. *Montrer que $X\in\operatorname{Ker} A$ si, et seulement si,*
$$L_1(UA)X=0,\dots,\ L_r(UA)X=0.$$
2. *Montrer que $Y\in\operatorname{Im} A$ si, et seulement si,*
$$L_{r+1}(U)Y=0,\dots,\ L_n(U)Y=0.$$

Exercice 19.22 (, matrices de Hessenberg)

1. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que les coefficients de PMP^{-1} en positions $(i,1)$ pour $i\geq 3$ soient nuls.*
2. *Conclure que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice $M=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,j}=0$ dès que $i>j+1$.*

$$\begin{bmatrix} \star & \dots & \dots & \dots & \star \\ \star & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \star & \star \end{bmatrix}$$

Exercice 19.23 ()

1. *Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ et d le PGCD des coefficients de X. Montrer qu'il existe $U\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers et d'inverse à coefficients entiers telle que*
$$UX=\begin{bmatrix} d\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$
2. *Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe $U\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers et d'inverse à coefficients entiers telle que UA soit échelonnée en ligne.*
3. *Échelonner dans $\mathbb{Z}$ la matrice*
$$A=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 3 & 2\end{bmatrix}.$$

Exercice 19.24

Montrer que les matrices $J=(1)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $nE_{1,1}$ sont semblables.

Chapitre 20

Groupe symétrique

Exercice 20.1

1. *Déterminer la décomposition en cycles à supports disjoints et la signature des permutations suivantes*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. *Préciser σ^{1789} et σ'^{1789}.*

Exercice 20.2

Soit $\sigma \in S_n$. Déterminer le nombre de parties $A \subset [\![1, n]\!]$ telles que $\sigma(A) = A$.

Exercice 20.3

Déterminer les permutations de S_6 qui commutent avec $(1\ 2\ 3) \circ (4\ 5\ 6)$.

Exercice 20.4

Montrer que les permutations de S_n qui commutent avec $\sigma = (1\ 2\ 3\ \dots\ n)$ sont les puissances de σ.

Exercice 20.5 (*inégalité de réarrangement*)

Soit $(x_k)_{k\leq n}$ et $(y_k)_{k\leq n}$ deux suites strictement décroissantes. Posons, pour tout $\sigma \in S_n$,

$$\Sigma_\sigma = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{\sigma(k)}.$$

Montrer que, pour tout $\sigma \in S_n$, $\Sigma_{\mathrm{Id}} \geq \Sigma_\sigma$

Exercice 20.6

Montrer que l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ telles que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \sigma(n+1-k) + \sigma(k) = n+1$$

est un sous-groupe de S_n.

Exercice 20.7

Montrer que $\{\sigma \in S_n,\ \sigma(n) = n\}$ est un sous-groupe maximal de S_n.

Exercice 20.8

Montrer qu'il existe un morphisme de groupes injectif de S_n dans A_{n+2}.

Exercice 20.9

Déterminer $|G|$ où G est le plus grand sous-groupe de S_4 tel que, pour tout $x \in G$, $x^2 = \mathrm{Id}$.

Exercice 20.10

Soit $n \geq 4$. Montrer que le groupe S_n est engendré par les 4-cycles.

Exercice 20.11

Préciser le nombre de classes de conjugaison dans le groupe S_5.

Exercice 20.12

Exprimer la signature d'une permutation en fonction de son nombre d'orbites.

Exercice 20.13 ( )

Notons $o(\sigma)$ le nombre d'orbites de $\sigma \in S_n$. Factoriser le polynôme

$$\sum_{\sigma \in S_n} X^{o(\sigma)}.$$

En déduire le nombre moyen d'orbites des permutations.

I came as a king, I left as a legend

Chapitre 21

Déterminants

Exercice 21.1

Soit x, y, $z \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2 & y^2 & z^2 & 1 \\ x^2 & 0 & x^2+y^2 & x^2+z^2 & 1 \\ y^2 & x^2+y^2 & 0 & y^2+z^2 & 1 \\ z^2 & x^2+z^2 & y^2+z^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 21.2

Soit $n \geq 3$ et a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., $b_n \in$. Calculer $\det(a_i - b_j)$.

Exercice 21.3

Notons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 21.4

Calculer le déterminant de la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$ égaux à 1 si $i = j$, $i = 1$ ou $j = 1$, nuls sinon.

Exercice 21.5

Déterminer selon les valeurs de $a \in$ le rang de

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & a \\ a & 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 21.6

Calculer les déterminants suivants

1. $\det\left(\binom{i}{j-1}\right)$.
2. $\det\left(\binom{i+j-2}{j-1}\right)$

Exercice 21.7

Soit $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \cdots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix}.$$

Exercice 21.8

Soit $E = \{P(x)e^x,\ P \in \mathbb{R}_n[X]\}$. Déterminer le déterminant de l'endomorphisme de dérivation sur E.

Exercice 21.9

Calculer le déterminant des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définis par

1. $u(M) = {}^tM$,
2. $u(M) = M + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n$.

Exercice 21.10

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{\pm 1\}$. Montrer que l'entier $\det M$ est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 21.11

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $a \in \mathbb{K}$. Montrer que l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} x & ay \\ y & x \end{bmatrix}$$

est un corps si, et seulement si, a n'est pas un carré dans $\mathbb{K}$.

Exercice 21.12

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(\mathrm{I}_p - AB) = \det(\mathrm{I}_q - BA)$.

Exercice 21.13

Soit $A \in \mathrm{GL}_n()$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}()$. Montrer que

$${}^tXA^{-1}X = \frac{\det(A + X{}^tX)}{\det A} - 1.$$

Exercice 21.14

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. *Montrer que $\det(A + X{}^tY) = (1 + {}^tYA^{-1}X)\det(A)$.*
2. *Supposons ${}^tYA^{-1}X \neq -1$. Établir la formule de Sherman-Morrison*

$$(A + X{}^tY)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + {}^tYA^{-1}X} A^{-1}X{}^tYA^{-1}.$$

Exercice 21.15

Soit A, B, C et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CD = DC$. Montrer que

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right| = \det(AD - BC).$$

On pourra commencer par le cas $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 21.16

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le déterminant de la matrice

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right]$$

est positif.

Exercice 21.17 ( )

1. *Montrer l'inversibilité de la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}()$ dont les coefficients sont*
$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. *En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_{2n}()$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et les autres sont de valeur absolue 1 est inversible.*
3. *Déterminer le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}()$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et les autres sont de valeur absolue 1*
4. *Soit n cailloux tels que tout lot de $n-1$ d'entre eux peut toujours se partitionner en deux tas de même masse. Montrer que n est impair.*

Exercice 21.18

Soit $M = (m_{i,j})_{i,j}$ une matrice telle que $C_\sigma = \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$ soit une quantité non nulle indépendante de $\sigma \in S_n$. Montrer que $\mathrm{rg} M = 1$.

Exercice 21.19

Soit $n > 1$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \det(A + M) = \det A + \det M.$$

Exercice 21.20

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det A = 1$ et

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \det(A + MN) = \det(A + NM).$$

Exercice 21.21

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que, si M est inversible, alors il n'existe pas de matrice inversible P telle que, pour tout $z \in$, $\det(P - zM) \neq 0$.*
2. *Montrer que ce résultat est faux si M est de rang $r < n$.*

Exercice 21.22

Soit A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $A + kB$ soit inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour tout k de $\{0, \dots, 4\}$. Montrer que $A + 5B$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 21.23

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et semblables sur . Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21.24

Soit A_1, B_1, A_2 et $B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que les matrices complexes $A_1 + iB_1$ et $A_2 + iB_2$ soient semblables. Montrer que les matrices

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & -B_1 \\ \hline B_1 & A_1 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c|c} A_2 & -B_2 \\ \hline B_2 & A_2 \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

sont semblables.

Exercice 21.25

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A + B) \geq 0$.

1. *Montrer que si $AB = BA$, alors $\det(A^k + B^k) \geq 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Montrer avec $A = \mathrm{I}_2 + \alpha E_{1,2}$ et $B = \mathrm{I}_2 + \alpha E_{2,1}$ que le résultat est faux sans l'hypothèse de commutation.*

Exercice 21.26

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq n < m$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}()$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}()$. Que dire de $\det(AB)$?

Exercice 21.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe N tel que pour tout premier $p \geq N$, les matrices A et $([A]_{i,j}[p])$ ont le même rang.

Exercice 21.28

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $[A]_{i,j} = 0$ pour tous i, j tels que $i + j < n + 1$. Montrer que, pour tous i, j tels que $i + j > n + 1$, $[A^{-1}]_{i,j} = 0$.

Exercice 21.29 ( )

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A = 0$ si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(A + B)^k = A^k + B^k$.

Chapitre 22

Construction de l'intégrale

Exercice 22.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $T > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = C.$$

Montrer que f est T-périodique.

Exercice 22.2

1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a+b-x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Calculer $\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*
2. *Calculer $\int_0^\pi \frac{t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$.*

Exercice 22.3

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Posons $a = \min_{x\in[0,1]} f(x)$, et $b = \max_{x\in[0,1]} f(x)$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leq -ab$.

Exercice 22.4

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 22.5

Soit $f : x \mapsto \ln x + \int_1^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^{1/4}}$. Montrer que f admet une limite en 0.

Exercice 22.6

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. *Montrer que*

$$(b-a) \min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

2. *En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*
3. *Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et d'intégrale non nulle. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.*

Exercice 22.7

Définissons, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, la fonction $f^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$f^* \ : \ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0,\\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que f^* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que f^* est continue en 0.*
2. *Montrer que si f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, alors f^* admet la même limite quand x tend vers $+\infty$.*

Exercice 22.8

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer que

$$\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \to \sup_{[a,b]} f.$$

Exercice 22.9

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Calculer $\lim \int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 22.10

Déterminer la limite de $\int_0^1 ((1-t)e^t)^n\,\mathrm{d}t$.

Exercice 22.11

Déterminer un équivalent de $\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 22.12

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\to 0$.

Exercice 22.13

Soit $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ continue non identiquement nulle, telle que

$$\forall\, k\in[\![0,n-1]\!],\qquad \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Montrer que f change au moins n fois de signe sur $]a,b[$.

Exercice 22.14

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite des expressions suivantes

1. $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$
2. $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{42n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Exercice 22.15

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite des expressions suivantes

1. $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{1\le k<l\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{l}{n}\right)$
2. $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{l}{n}\right)$

Exercice 22.16

Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier inscrit dans le cercle unité tel que $A_1(1,0)$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Exercice 22.17

Soit f, g continues sur $[0,1]$. Déterminer la limite de $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Exercice 22.18 (🔥)

Soit x_n l'argument du premier maximum local de $f_n:x\mapsto\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\lim f_n(x_n)=\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 22.19

Pour tout $n\ge 1$, posons $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$.

1. *Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite ℓ.*
2. *Préciser un équivalent simple de $u_n-\ell$.*

Exercice 22.20

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+^*$ continue.

1. *Montrer qu'il existe une subdivision $(x_k^{(n)})_{k\in[\![0,n]\!]}$ telle que*

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad \int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. *Déterminer la limite de $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(n)}$.*

I came as a king, I left as a legend

Chapitre 23

Séries numériques

Exercice 23.1

Montrer la convergence puis calculer la somme des séries de terme général

1. $\frac{1}{n(4n^2-1)}$
2. $\ln(1+\frac{2}{n(n+3)})$

Exercice 23.2

Déterminer la nature de la série de terme général

1. $n^{-1-\frac{1}{n}}$
2. $\arccos(\frac{2}{\pi}\arctan(n^\alpha))$
3. $\ln\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
4. $\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$
5. $\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\dots\ln(\ln(\dots(\ln(n))\dots))}$
6. $\ln\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$
7. $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
8. $\frac{n^2-2}{n!}$
9. $\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!}$ *pour* $a>0$
10. $e-(1+\frac{1}{n})^n$
11. $\frac{1}{n^\alpha}\int_0^n\frac{\arctan t}{1+t}\,\mathrm{d}t$
12. $\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln\ln n}}$
13. $(\cos\frac{1}{n})^{n^\alpha}$
14. $\frac{(-1)^n}{n+\frac{(-1)^n n}{\ln n}}$
15. $e^{-(\ln n)^\alpha}$ *pour* $\alpha>0$

Exercice 23.3

Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Exercice 23.4

Déterminer, selon les valeurs de a, b, $c\in\mathbb{R}$, *la nature de la série de terme général*

$$u_n=a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}.$$

Exercice 23.5

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $u_1=1$ *et* $u_n=2u_{\lfloor n/2\rfloor}$ *si* $n\geq 2$. *Montrer que la série de terme général* $1/{u_n}^2$ *est convergente et calculer sa somme.*

Exercice 23.6

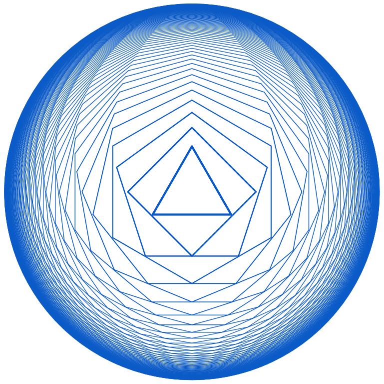
Déterminer la nature de la série de terme général u_n *où* $u_n=\frac{1}{n}$ *si* n *est un carré et* $u_n=\frac{1}{n^2}$ *sinon.*

Exercice 23.7

Déterminer, selon les valeurs de α, *la nature de la série de terme général* $(\arccos(\frac{n}{n+1}))^\alpha$

Exercice 23.8 (🔥)

Expliquer la construction de la figure suivante puis justifier l'existence d'une taille limite.



Exercice 23.9

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $c(n)$ *le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de* n. *Montrer la convergence de la série de terme général* $u_n=\frac{c(n)}{n(n+1)}$ *puis calculer sa somme.*

Exercice 23.10

Soit $\sigma:\mathbb{N}\setminus\{0\}\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$ *bijective. Montrer que la série de terme général* $\frac{1}{n\sigma(n)}$ *converge mais que la série de terme général* $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ *diverge.*

I came as a king, I left as a legend

Exercice 23.11

Soit $(z_n = |z_n| e^{i\theta_n})$ une suite de complexes telles qu'il existe $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\theta_n| \leq \alpha.$$

Montrer que les séries de termes généraux z_n et $|z_n|$ sont de même nature.

Exercice 23.12

Déterminer, selon la valeur de α, la nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^2+\alpha})$.

Exercice 23.13

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Exercice 23.14

Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n \cos(u_n)$. Étudier la convergence des séries

$$\sum (-1)^n u_n, \qquad \sum \ln\cos(u_n), \qquad \sum u_n.$$

Exercice 23.15

Déterminer un équivalent de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha \in]0, 1[$.

Exercice 23.16

Déterminer la nature de la série de terme général u_n défini par

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 23.17

Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}$.

Exercice 23.18

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_{n+1} = o(u_n)$.

1. *Montrer que la série de terme général u_n converge.*
2. *Montrer que $\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k \sim u_n$.*

Exercice 23.19

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante. Définissons la suite $(v_n)_n$ par $v_n = 2^n u_{2^n}$. Montrer que les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Exercice 23.20 (*règle de Raabe-Duhamel*)

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.
On pourra considérer la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

Exercice 23.21

Soit $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$. Montrer que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 23.22

Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \ln(1+u_n).$$

1. *Déterminer un équivalent de u_n.*
2. *La série de terme général u_n est-elle convergente ?*

Exercice 23.23

Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. *Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.*
2. *En considérant la série de terme général $x_{n+1} - x_n$, montrer que la suite $(x_n = 2^{-n} \ln u_n)$ converge.*
3. *En déduire un équivalent de u_n.*

Exercice 23.24

Notons, pour tout $n \geq 1$, p_n le n-ème nombre premier (donc $p_1 = 2$, $p_2 = 3$...).

1. *Montrer que la divergence de la suite* $\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)_n$ *entraîne celle de la série de terme général* $\frac{1}{p_n}$.
2. *Montrer que la suite* $\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)_n$ *diverge. Conclure.*

Exercice 23.25

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que la série de terme général* u_n *diverge et notons* S_n *la* n*-ième somme partielle. Montrer que la série de terme général* $\frac{u_n}{S_n}$ *diverge mais que pour tout* $\alpha > 0$, *la série de terme général* $\frac{u_n}{S_n^{1+\alpha}}$ *converge.*

Exercice 23.26

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite de réels positifs telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que la série de terme général u_n *converge.*

Exercice 23.27

Montrer que

$$e\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!}.$$

Exercice 23.28

Soit $z \in$ *de module strictement plus petit que* 1. *Montrer que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$$

où d_n *est le nombre de diviseurs positifs de* n.

Exercice 23.29

Soit $\alpha > 2$. *Montrer que*

$$\zeta(\alpha-1) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Exercice 23.30

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que la série de terme général* u_n^2 *converge. Justifier la sommabilité de la famille* $\left(\frac{u_p u_q}{p+q+1}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *puis établir l'inégalité*

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{u_p u_q}{p+q+1} \leqslant \pi \sum u_n^2.$$

Exercice 23.31

Soit $b > a \geq 2$ *des entiers et* $s > 0$. *Montrer que la famille* $(a^{-ks}b^{-ls})_{k,l}$ *est sommable.*

Exercice 23.32

Soit a, b *et* $c \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Montrer que, pour tout* $z \in$ *tel que* $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{an}}{1-z^{bn+c}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{cn}}{1-z^{bn+a}}.$$

Exercice 23.33

En utilisant l'application $(m,n) \mapsto (m\wedge n, \frac{m}{m\wedge n}, \frac{n}{m\wedge n})$, *montrer que*

$$\zeta(4)\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m\wedge n=1}} \frac{1}{m^2n^2} = \zeta(2)^2.$$

Chapitre 24

Intégration sur un intervalle

Exercice 24.1

Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle indiqué.

1. $\frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$
2. $\frac{\ln(1+1/t)}{(t^2-1)^\alpha}$ *sur* $]1,+\infty[$
3. $\frac{1}{e^t+t^2e^{-t}}$ *sur* $\mathbb{R}$
4. $\frac{e^{\sin t}}{t}$ *sur* $[1,+\infty[$
5. $\sqrt{\ln\frac{1}{t}}$ *sur* $]0,1[$
6. $\ln\frac{1+t^2}{1+t^3}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$
7. $\int_t^1 \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u$ *sur* $]0,1]$

Exercice 24.2

Étudier l'intégrabilité de $x\mapsto x^\alpha|\ln(x)|^\beta$ *sur* $]0,1[$.

Exercice 24.3

Soit $\alpha>0$ *et* $\beta>0$. *Étudier l'intégrabilité de* $x\mapsto\frac{(x+1)^\alpha-x^\alpha}{x^\beta}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 24.4

Étudier en fonction de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ *l'intégrabilité sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $t\mapsto\frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}$.

Exercice 24.5

Montrer que la fonction $x\mapsto\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}\sqrt{3-x}}$ *est intégrable sur* $]1,3[$.

Exercice 24.6

Soit α, $\beta>0$. *Étudier l'intégrabilité en* 0 *de* $x\mapsto\frac{e^{-x^\alpha}-e^{-x^\beta}}{x}$.

Exercice 24.7

Calculer, pour $a>0$ *et* $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-at}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t$.

Exercice 24.8

Prouver l'intégrabilité et calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$
2. $\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}=\pi$
3. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\frac{\pi}{4}$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}=\pi$

Exercice 24.9

Calculer à l'aide du changement de variables indiqué

1. $\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t=4\ln 2-4$ *en posant* $u=\sqrt{1-t}$
2. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=0$ *en posant* $u=\frac{1}{t}$

Exercice 24.10

Calculer l'intégrale des fonctions suivantes sur l'intervalle $]1,+\infty[$

1. $x\mapsto\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
2. $x\mapsto\frac{\sqrt{\arctan\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+x)}$

Exercice 24.11

Définissons $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)}$ *et* $J_n=\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que ces intégrales sont bien définies.*
2. *Montrer que, pour tout* $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $I_n=J_n$ *puis calculer cette valeur.*

Exercice 24.12

1. *Montrer que les intégrales* $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ *et* $J=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$ *sont bien définies.*
2. *Montrer que* $I=J$
3. *Calculer la valeur de* $I+J$ *à l'aide du changement de variables* $x=t-\frac{1}{t}$.
4. *En déduire* I.

I came as a king, I left as a legend

Exercice 24.13

Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t\,.$$

Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *puis un équivalent de* $f(x)$ *en* $+\infty$.

Exercice 24.14

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $f(1) = 0$ *et* $f'(1) = 1$. *Calculer la limite en* 1 *par valeurs inférieures de*

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.$$

Exercice 24.15

Soit $0 < a < b$. *Déterminer les limites*

$$\lim_{x\to0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos t\, \ln(1+t^2)}{\sin^2 t\, \mathrm{sh} t} \,\mathrm{d}t, \qquad \lim_{x\to0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1-\cos t}{t^3} \,\mathrm{d}t\,.$$

Chapitre 25

Dénombrement

Exercice 25.1

Dénombrer les applications $f : [\![1,12]\!] \to [\![1,12]\!]$ *telles que*

1. *l'image d'un entier pair est paire ;*
2. *l'image d'un entier divisible par* 3 *est divisible par* 3 *;*
3. f *est bijective.*

Recommencer en supprimant la dernière condition.

Exercice 25.2

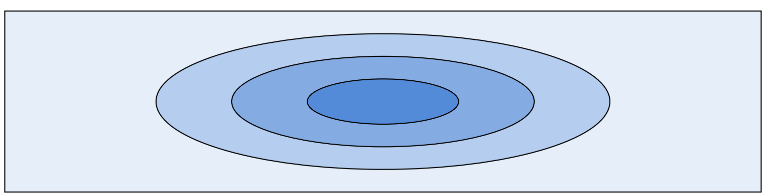
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*. Dénombrer les couples* $(x,y) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ *tels que* $xy = n$ *et* $x \wedge y = 1$.

Exercice 25.3

Soit E *un ensemble de cardinal* n*. Dénombrer les couples* $(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ *tels que* $X \cap Y$ *est de cardinal* 1.

Exercice 25.4

Soit E *un ensemble de cardinal* n*. Dénombrer les triplets* $(X,Y,Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ *tels que* $X \subset Y \subset Z$.



Exercice 25.5

Montrer que $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} \sum_{k \in X} k = n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 25.6

Soit A *et* B *deux parties d'un ensemble* E *telles que* A *soit finie. Dénombrer les parties* $X \subset E$ *telles que* $A \cup X = B$.

Exercice 25.7

Calculer

$$\sum_{\substack{X,Y \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \\ X \cap Y = \varnothing}} (|X| + |Y|).$$

Exercice 25.8 ( )

Soit E *un ensemble de cardinal* n *muni d'une relation d'équivalence* $\mathcal{R}$*,* k *le nombre de classes d'équivalence et* m *le cardinal de l'ensemble des couples* $(x,y) \in E^2$ *tels que* $x\mathcal{R}y$*. Montrer que* $n^2 \leq km$.

Exercice 25.9

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que, pour* $n \in \mathbb{N}$*,* $f(n)$ *est le nombre de fois que le chiffre 1 apparaît dans la liste des entiers compris entre 0 et* n.

1. *Déterminer* $f\left(10^k - 1\right)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
2. *Montrer qu'il existe un nombre fini de* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $n \geq f(n)$.

Exercice 25.10 (*théorème de Beatty*)

Pour tout réel $\alpha > 1$*, notons* $A_\alpha = \{\lfloor n\alpha \rfloor,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

1. *Soit* $\alpha > 1$ *et* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*. Calculer* $|A_\alpha \cap [\![1,n]\!]|$.
   On pourra distinguer les cas $\alpha \notin \mathbb{Q}$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. *Soit* $\alpha, \beta > 1$*. Montrer que les ensembles* A_α *et* A_β *forment une partition de* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *si, et seulement si,* α *et* β *sont deux irrationnels tels que*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

I came as a king, I left as a legend

Exercice 25.11

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. *Dénombrer les solutions dans $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^k$ de l'équation*

$$x_1 + \ldots + x_k = n.$$

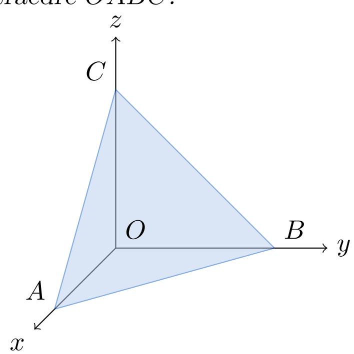
On pourra introduire l'application qui, à une solution $(x_1, \ldots, x_k)$, associe l'ensemble de $[\![1, n-1]\!]$ défini par $\{x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \ldots + x_{k-1}\}$.

2. *En déduire le nombre de solutions dans $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^k$ de l'inéquation*

$$x_1 + \ldots + x_k \leq n.$$

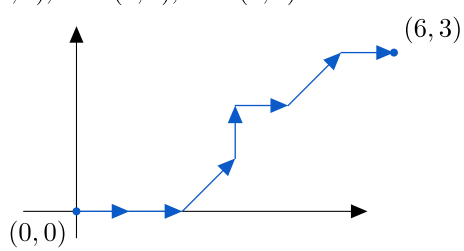
Exercice 25.12

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le repère de l'espace orthonormal et les points $O(0,0,0)$, $A(n,0,0)$, $B(0,n,0)$ et $C(0,0,n)$. Dénombrer les points à coordonnées entières dans le tétraèdre $OABC$.



Exercice 25.13

Un chemin de Delannoy aboutissant en (m,n) est une suite de points $M_0, \ldots, M_N$ tels que $M_0(0,0)$, $M_N(m,n)$ et, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, le vecteur $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ est soit $(1,0)$, soit $(0,1)$, soit $(1,1)$.



Montrer que le nombre de chemins de Delannoy aboutissant en (m,n) est

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m+n-k}{k} \binom{m+n-2k}{n-k}.$$

Exercice 25.14

Le nombre de Stirling de deuxième espèce $S_{n,k}$ est le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

1. *Calculer $S_{n,1}$, $S_{n,2}$ et $S_{n,n-1}$.*
2. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$,*

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$

Exercice 25.15

Soit $s_{n,k}$ le nombre d'éléments de S_n admettant exactement k points fixes. Montrer que $ks_{n,k} = ns_{n-1,k-1}$.

Exercice 25.16

Soit $u_{n,k}$ le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs. Montrer que $u_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$.
On pourra commencer par établir une relation de récurrence.

Exercice 25.17

Dénombrer les permutations $\sigma \in S_{2n}$ telles que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(n) \qquad \text{et} \qquad \sigma(2n) < \sigma(2n-1) < \ldots < \sigma(n).$$

Exercice 25.18

1. *Rappeler le nombre de permutations circulaires de S_n.*
2. *En déduire le nombre de cycles de longueur $k \leq n$ de S_n.*
3. *Dénombrer les permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.*

Exercice 25.19

Dénombrer les permutations de S_{20} dont la décomposition en cycle de supports disjoints contient trois 4-cycles, deux 3-cycles et deux points fixes.

Exercice 25.20

Soit p premier. Dénombrer les éléments d'ordre p dans S_{2p}.

Exercice 25.21

Soit c_n le nombre de permutations $\sigma \in S_n$ connectées, c'est-à-dire telles que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \sigma\left([\![1,k]\!]\right) \neq [\![1,k]\!].$$

Montrer que $n! = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k (n-k)!$.

Exercice 25.22

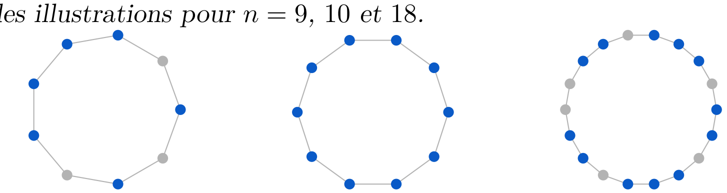
Soit $A_1, \dots, A_m$ des parties d'un ensemble S de cardinal $n \geq 2$. On suppose que, pour tous $x, y \in S$ avec $x \neq y$, il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $x \in A_i$ et $y \notin A_i$, ou $y \in A_i$ et $x \notin A_i$. Montrer que $m \geq \log_2(n)$.

Exercice 25.23

Considérons cinq points du plan à coordonnées entières. Montrer qu'au moins un des milieux de ces couples de points est à coordonnées entières.

Exercice 25.24

Soit un polygone régulier à n côtés. Déterminer le cardinal du plus grand ensemble de sommets tels trois d'entre eux ne forment pas un triangle équilatéral. Voici des illustrations pour $n = 9$, 10 et 18.



Exercice 25.25

Montrer qu'un ensemble est infini si, et seulement si, pour toute application $f : E \to E$, il existe une partie $A \subsetneq E$ telle que $f(A) \subset A$.

Exercice 25.26

Soit $A \subset \mathbb{R}$ infinie non dénombrable.

1. *Montrer qu'il existe un $x \in A$ tel que la partie $A \cap]-\infty, x[$ est infinie non dénombrable.*
2. *En déduire qu'il existe une suite à valeurs dans A strictement décroissante.*
3. *Est-ce encore vrai si A est dénombrable ?*

Chapitre 26

Probabilités

Exercice 26.1

Déterminer toutes les tribus sur l'univers $\{a, b\}$ puis sur $\{a, b, c\}$.

Exercice 26.2

Considérons une suite d'ensembles $(\Omega_n)_n$ chacun étant muni d'une tribu non triviale notée $\mathcal{A}_n$. Un cylindre du produit cartésien infini

$$\prod_{n=0}^{\infty} \Omega_n$$

est un ensemble de la forme

$$\prod_{n=0}^{\infty} A_n$$

où $A_n = \Omega_n$ sauf pour un nombre fini d'entiers pour lesquels on a seulement $A_n \in \mathcal{A}_n$.

Montrer que l'ensemble des cylindres n'est pas une tribu sur $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \Omega_n$

Exercice 26.3

Soit E, F deux ensembles, $\mathcal{A}$ une tribu sur E et $f : E \to F$. Montrer que l'ensemble des parties $A \subset F$ telles que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ est une tribu sur F.

Exercice 26.4

Paul Éluard dispose les lettres B, E, E, I, L, R et T au hasard sur l'un de ses cahiers d'écolier. Quelle est la probabilité qu'il puisse ensuite dire « j'écris ton nom » sans mentir ?

Exercice 26.5

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$. Déterminer le meilleur encadrement pour $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 26.6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A_1, ..., $A_n \in \mathcal{A}$. Notons

$$\Gamma = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \ldots \times \{A_n, \overline{A_n}\}.$$

Montrer que

$$\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma} \mathbb{P}(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = 2^n - 1.$$

Exercice 26.7

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $A \subset \Omega$, A_1, ..., A_n une partition de A d'événements de probabilités non nulles, et $B \subset \Omega$, telle que la probabilité $\mathbb{P}(B|A_k)$ ne dépende pas de k. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(B|A_k) = \mathbb{P}(B|A)$.

Exercice 26.8

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ tel que $|\Omega|$ est un nombre premier p et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Montrer que deux événements A et B non triviaux ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 26.9

Soit Ω un univers fini, A_1, ..., A_n des événements indépendants de probabilités dans $]0, 1[$. Montrer que $|\Omega| \geq 2^n$.

Exercice 26.10 (*inégalités de Boole-Fréchet*)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. *Montrer que*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

2. *Montrer que*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leq \min_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(A_i).$$

I came as a king, I left as a legend

Exercice 26.11

Soit A_1, ..., A_n des événements indépendants. Montrer que

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k) \leq \exp(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)).$$

Exercice 26.12

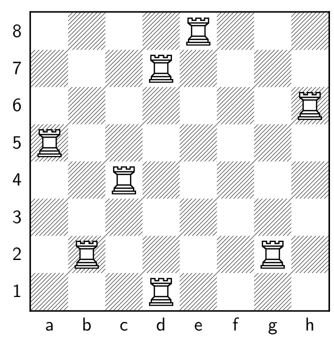
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B | A \cup B) \leq \mathbb{P}(A \cap B | A)$.

Exercice 26.13

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Montrer qu'il n'existe pas d'événements A_1,..., A_n indépendants, de réunion Ω et de même probabilité $p < 1$.

Exercice 26.14

Quelle est la probabilité de placer 8 tours sur un échiquier de telle sorte que deux d'entre elles ne puissent s'attaquer l'une l'autre ?
Voici, par exemple, une configuration à éviter (souci en ligne 2 et colonne d)



Exercice 26.15

Considérons une urne dans laquelle se trouve des boules numérotées de 1 à n. Pour un tirage aléatoire d'une boule, étudier l'indépendance des événements A : « le nombre tiré est pair » et B : « le nombre tiré est un multiple de 3 ».

Exercice 26.16

Considérons trois tirages indépendants d'une pièce biaisée à Pile ou Face. Déterminer les valeurs de p la probabilité d'obtenir Pile à un lancer pour lesquelles les événements A « les deux premiers lancers donnent le même résultat » et B « les deux derniers lancers donnent le même résultat » sont indépendants.

Exercice 26.17

On considère un jeu de cartes numérotées initialement de 1 à n. Après avoir mélangé les cartes, quelle est la probabilité que

1. *la carte 1 soit plus loin dans le paquet que la carte 2 ?*
2. *les cartes 1 et 2 soient voisines ?*

Exercice 26.18

Considérons l'espace probabilisé obtenu avec $\Omega = S_n$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. *Déterminer la probabilité que 1 et 2 soient dans la même orbite de taille 2 d'une permutation.*
2. *Déterminer la probabilité que 1 et 2 soient dans la même orbite d'une permutation.*
3. *Déterminer la probabilité que 1 et n soient dans la même orbite d'une permutation.*

Exercice 26.19 (*formule du crible de Poincaré*)

1. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A_1, ..., $A_n \subset \Omega$. Montrer que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{-1+|I|}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

2. *Munissons S_n de la probabilité uniforme. Déterminer la probabilité qu'une permutation soit sans point fixe. Calculer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.*

Exercice 26.20 (*loi de succession de Laplace*)

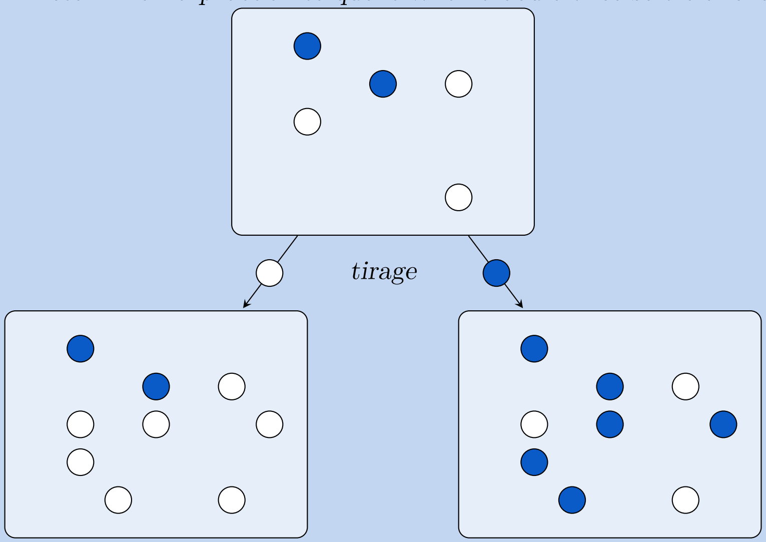
Considérons $n+1$ urnes numérotées de 0 à n telle que l'urne numérotée k contienne $n-k$ boules colorées et k boules blanches. On choisit une urne au hasard et on effectue des tirages avec remises au hasard dans cette urne.

1. *Déterminer la probabilité p_n que les N premiers tirages amènent des boules blanches. Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.*
2. *Déterminer la probabilité q_n que la $(N+1)$-ième boule tirée soit colorée*

sachant que les N premières boules tirées étaient blanches. Déterminer la limite de q_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26.21 (*urne de Polya*)

On considère une urne contenant a boules colorées et b boules blanches. Après chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur. Déterminer la probabilité que la n-ième boule tirée soit blanche.



Exercice 26.22

Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Notons P_n l'ensemble des diviseurs premiers de n et définissons, pour tout $p \in \mathrm{P}_n$, $A_p = \{a \in \Omega,\ p|a\}$.

1. *Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ pour tout $p \in \mathrm{P}_n$.*
2. *Montrer que les événements A_p pour $p \in \mathrm{P}_n$ sont indépendants.*
3. *En déduire que la fonction d'Euler $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers k de $[\![1, n]\!]$ tels que $k \wedge n = 1$, vérifie*

$$\varphi(n) = n \prod_{p \in \mathrm{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Exercice 26.23

Supposons qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que $\mathbb{P}(k\mathbb{N} \setminus \{0\}) = 1/k$ pour tout k.

1. *Montrer que pour toute suite $(a_n)_n$ d'entiers deux à deux premiers entre eux, la suite d'événements $(a_n\mathbb{N} \setminus \{0\})_n$ est indépendante.*
2. *Aboutir sur une contradiction avec le lemme de Borel-Cantelli.*

Exercice 26.24

Soit p_1, p_2 deux premiers distincts et $n \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq p_1 < p_2 \leq n$. On munit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ de la probabilité uniforme et on considère les événements

$$E_1 = \{k \in \{1, \ldots, n\},\ p_1 \,|\, k\} \text{ et } E_2 = \{k \in \{1, \ldots, n\},\ p_2 \,|\, k\}.$$

Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si, et seulement si, n s'écrit sous la forme $n = k\,p_1p_2 + \ell p_1$ avec $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq \ell p_1 < p_2$.

Chapitre 27

Variables aléatoires

Exercice 27.1

Soit $n \geq 1$. Considérons une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi vérifiant

$$\forall k \geq 1, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}.$$

Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$.

Exercice 27.2

Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres 1, $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{1}{n}$. Soit N la variable aléatoire définie comme 0 si $X_1 = \ldots = X_n = 1$, $\min\{k \in [\![1, n]\!], X_k = 0\}$ sinon. Calculer la loi de N.

Exercice 27.3

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et Y la variable telle que la loi de Y sachant $X = k$ est uniforme sur $[\![1, k]\!]$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de Y puis son espérance.

Exercice 27.4

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Considérons X_n une variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'un élément uniformément choisi dans S_n.

1. *Calculer $P(X_n = n)$.*
2. *Déterminer le nombre de permutations sans point fixe ; en déduire $\mathbb{P}(X_n = 0)$.*
3. *Déterminer la loi de X_n.*
4. *Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ lorsque $n \to \infty$.*
5. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| \to 0.$$

Exercice 27.5

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur S_n. Déterminer la loi du cardinal de l'orbite de 1 par X.

Exercice 27.6 (🔥)

Soit X_1, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $k \leq n$, X_k suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, k\}$. Définissons une suite de variables aléatoires $(\Sigma_k)_{k \leq n}$ par

- ▷ $\Sigma_1 = \mathrm{Id}$,
- ▷ *pour tout* $2 \leq k \leq n$, $\Sigma_k = \Sigma_{k-1} \circ (1\ 2\ \ldots\ k)^{X_k}$.

Déterminer la loi de Σ_n.

Exercice 27.7

Soit X et Y deux variables indépendances de loi uniforme dans $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$. Calculer $\mathbb{P}(X \cap Y = \varnothing)$.

Exercice 27.8 (🔥)

Soit X_1, ..., X_p des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$. Montrer que la variable $|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_p|$ suit une loi binomiale.

Exercice 27.9

Soit $s > 1$ et $\mathbb{P}$ la probabilité sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \qquad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}.$$

Pour tout nombre premier p, on définit une variable aléatoire $X_p : n \mapsto v_p(n)$.

1. *Montrer que les variables $(X_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont deux à deux indépendantes.*
2. *Montrer que, pour tout $p \in \mathcal{P}$, $X_p + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.*

Exercice 27.10

Soit une urne avec 2 boules blanches et $n-2$ boules noires. On tire les boules une à une sans remise et on note T_1 le temps de tirage de la première boule blanche et T_2 le temps de tirage de la seconde boule blanche.

1. *Déterminer la loi de T_1.*
2. *Déterminer la loi de T_2 sachant $T_1 = k$. En déduire la loi de T_2.*

Exercice 27.11

Soit une urne avec k boules blanches et $n-k$ boules noires. On tire les boules une à une sans remise. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au rang de la dernière boule blanche tirée. Préciser l'espérance et la variance de cette loi.

Exercice 27.12

Soit X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que si X et $f(X)$ sont indépendantes, alors $f(X)$ est certaine.

Exercice 27.13

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ de même loi telles que

- ▷ *Y et Z sont indépendantes,*
- ▷ *$2X$ et $Y+Z$ suivent la même loi.*

1. *On suppose dans cette question que la variable X admet une variance. Montrer que X est presque sûrement constante.*
2. *Notons dorénavant $X' = e^{-X}$. Montrer que X' admet une variance.*
3. *En déduire que X est presque sûrement constante.*

Exercice 27.14

Soit E un ensemble fini et X une variable aléatoire à valeurs dans E. Notons pour tout $x \in E$, $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$. Montrer que $\mathbb{E}(\frac{1}{p(X)}) = |E|$.

Exercice 27.15 ( )

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \prec Y$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y \geq t)$.

1. *Montrer que $X \prec Y$ si, et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ croissante et bornée, $\mathbb{E}\left(h(X)\right) \leq \mathbb{E}\left(h(Y)\right)$.*
2. *Supposons que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Montrer que $X \prec Y$ si, et seulement si, $\lambda \leq \mu$.*
3. *Supposons X et Y indépendantes et $X \prec Y$. Montrer que*

$$\mathbb{P}(X \leq Y) \geq 1/2.$$

Exercice 27.16

Soit U et V des variables indépendantes à valeurs entières telles que $U+V$ suit une loi binomiale de paramètres n et p. Que dire de U et V ?
On pourra passer par les fonctions génératrices.

Exercice 27.17

Soit U_1, ..., U_n des variables de Bernoulli sur $\{\pm 1\}$ de paramètre p indépendantes. Calculer la covariance de $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ et $\sum\limits_{k=1}^{m} U_k$ pour $m \leq n$.

Exercice 27.18 (*inégalité de Paley-Zygmund*)

Soit X une variable aléatoire positive et $\lambda \in]0,1[$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}(X)) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 27.19

Soit $n \geq 2$, $m \in [\![1,n]\!]$, X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Définissons la variable aléatoire Z par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Z(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq m, \\ X_2(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Comparer les espérances des variables X_1, X_2 et Z.*
2. *Déterminer les valeurs de m qui maximisent l'espérance de Z.*

Exercice 27.20

Soit X et Y deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, $I = \min(X,Y)$ et $S = \max(X,Y)$.

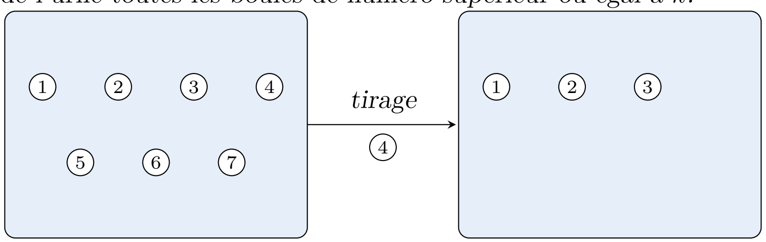
1. *Calculer la loi puis l'espérance de I.*
2. *Déterminer la loi du couple (I,S). Les variables I et S sont-elles indépendantes ?*

Exercice 27.21

1. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. Montrer que*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$
2. *Soit une urne avec n boules numérotées de 1 à n et $m \leq n$. On tire m boules sans remise et on note X le plus petit numéro d'une boule tirée. Calculer $\mathbb{E}(X)$.*

Exercice 27.22

Soit $n \geq 2$ un entier. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On cherche à extraire la boule numérotée 1 avec le protocole suivant : tant que l'on ne l'a pas obtenue, on tire une boule, on lit la valeur k de cette boule et on retire de l'urne toutes les boules de numéro supérieur ou égal à k.



On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule numéro 1.

1. *Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.*
2. *Montrer que, pour tout $j \geq 2$,*
$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j-1).$$
3. *En déduire que, pour tout $j \geq 2$,*
$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j-1).$$
4. *Montrer que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.*
5. *Exprimer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$ et de $\mathbb{E}(X_{n-1})$.*
6. *Montrer que X_n a la même loi que la somme de variables $T_1, \ldots, T_n$ indépendantes telles que, pour tout k, T_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{k}$. En déduire la variance de X_n.*

Exercice 27.23

Soit ε_1, ..., ε_n des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{\pm 1\}$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k$. Montrer que les variables X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.

Exercice 27.24

Soit X et ε deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé fini telles que

- ▷ *X et $-X$ sont de même loi,*
- ▷ *ε est à valeur dans $\{\pm 1\}$.*

Montrer que, si X et εX sont indépendantes alors l'une des conditions suivantes est réalisée

- ▷ *X est une variable certaine égale à 0,*
- ▷ *ε suit une loi uniforme et X suit une loi définie par*
$$\mathbb{P}(X = x_0) = \mathbb{P}(X = -x_0) = \frac{1}{2},$$
pour un certain $x_0 > 0$.

Exercice 27.25

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.

1. *Déterminer la loi du couple $(U, V) = (X+Y, X-Y)$, en déduire les lois marginales.*
2. *Déterminer la loi de U conditionnée à $V = 1$.*
3. *Les variables U et V sont-elles indépendantes ?*

Exercice 27.26 ( )

Soit $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de loi donnée par $\mathbb{P}(X_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$.
Déterminer l'espérance du déterminant D de la matrice $M = (X_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, puis montrer que, pour tout $\lambda > 0$,
$$\mathbb{P}(D \geq \lambda\sqrt{n!}) \leq \lambda^{-2}.$$

Chapitre 28

Espaces euclidiens

Exercice 28.1

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Montrer que $n^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$.

Exercice 28.2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}.$$

Exercice 28.3

Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\mathrm{tr} A| \leq \sqrt{n}\|A\|$.

Exercice 28.4

Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x)g(x) \geq 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x\right) \geq 36.$$

Exercice 28.5

Montrer que deux vecteurs x, y d'un espace euclidien sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 28.6

Soit n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ d'un espace euclidien E. La matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est la matrice $G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.

1. *Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si, $G(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.*
2. *Soit n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale. Montrer que*

$$\det G(x_1, \dots, x_n) = [\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)]^2.$$

3. *Soit $x_1, \dots, x_p \in E$, $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ et $x \in E$. Montrer que*

$$d(x, F)^2 \det G(x_1, \dots, x_p) = \det G(x, x_1, \dots, x_p).$$

Exercice 28.7

Considérons $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons L_k le polynôme égal à la dérivée k-ième de $[X(X-1)]^k$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

1. *Montrer que la famille $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est orthogonale.*
2. *Calculer la norme euclidienne de L_k pour $k \in [\![0,n]\!]$.*

Exercice 28.8

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et P un polynôme non-nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

1. *Préciser le degré de P.*
2. *Montrer que la fonction $R : x \mapsto \int_0^1 P(t)t^x\,\mathrm{d}t$ est rationnelle.*

3. *Trouver R à une constante multiplicative près.*
4. *En déduire les coefficients de P.*
5. *En déduire une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Exercice 28.9

Soit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, et l'hyperplan $H = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$. Déterminer $H^\perp$.

Exercice 28.10

Considérons $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et l'hyperplan

$$H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

où $a_1,\dots,a_n$ sont des réels fixés non tous nuls. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 28.11

Considérons $\mathbb{R}_n[X]$ avec le produit scalaire canonique. Posons $H = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$.

1. *Trouver une base orthonormale de H.*
2. *Montrer que $d(X,H) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.*

Exercice 28.12

Soit x, y deux vecteurs d'un espace euclidien de dimension au moins 2 tels que $\langle x|y\rangle = \|y\|^2$. Montrer qu'il existe un unique hyperplan H tel que la projection orthogonale de x sur H est y.

Exercice 28.13

Soit F, G deux sous-espaces d'un espace euclidien E tels que $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux. Notons p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{Id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.

Exercice 28.14

Soit E un espace euclidien et $e_1,\dots,e_n \in E$ tels que

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i\rangle^2.$$

1. *Montrer que la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice.*
2. *Supposons, dans cette question, que les vecteurs $e_1,\dots,e_n$ sont unitaires. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.*
3. *Supposons, dans cette question, que $\dim E = n$.*
   (a) *Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.*
   (b) *Montrer que*
   $$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i\rangle\langle y|e_i\rangle.$$
   (c) *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient en position i,j est $\langle e_i|e_j\rangle$. Montrer que $M^2 = M$ et conclure.*

Exercice 28.15

Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

1. *Montrer que $\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|x\rangle$ pour tout $x \in E$.*
2. *Montrer que, pour toute base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E,*
$$\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = \mathrm{rg}(p).$$

Exercice 28.16

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 28.17

Soit E un espace euclidien.

1. *Montrer que tout application $u : E \to E$ telle que*
$$\forall x,y \in E, \qquad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$$
est linéaire.
2. *Montrer que tout application $u : E \to E$ telle que $u(0_E) = 0_E$ et*
$$\forall x,y \in E, \qquad \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$$
est linéaire.

Exercice 28.18

Soit F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E tels que $\dim F = \dim G$.
Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u(F) = G$.

Exercice 28.19

Soit E un espace euclidien, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, x_1, ..., x_p, y_1,..., $y_p \in E$.
Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ telle que, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $u(x_i) = y_i$ si, et seulement si,

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \qquad \langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle .$$

Exercice 28.20

Déterminer a, b, c tels que la matrice

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & a & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ c & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

soit une matrice orthogonale.

Exercice 28.21

Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$; notons $\sigma_1 = a + b + c$ $\sigma_2 = ab + bc + ca$, et

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}.$$

Montrer que M est orthogonale si, et seulement si, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_1 \in \{\pm 1\}$.

Exercice 28.22

Déterminer l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la matrice

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{bmatrix}$$

soit orthogonale.

Exercice 28.23

Déterminer les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures.

CHAPITRE 29

Introduction à la topologie

Exercice 29.1

Posons, pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$
$$\|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\},$$
$$\|P\| = \max\{|P(t)|,\ -1 \leq t \leq 1\}.$$

Vérifier que ces trois expressions définissent des normes.

Exercice 29.2

Montrer que l'application sur $\mathbb{R}[X]$ *définie par*

$$P \mapsto \|P\| = \sup\{|P(t) - P'(t)|,\ t \in [0,1]\}$$

est une norme.

Exercice 29.3

Soit E *l'ensemble des fonctions* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lipschitziennes. Posons, pour* $f \in E$,

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|,$$
$$N(f) = |f(0)| + \sup_{x \neq 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right|.$$

1. *Montrer que* E *est un espace vectoriel.*
2. *Montrer que* $\|.\|$ *et* N *sont des normes sur* E.

Exercice 29.4

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *posons*

$$\theta_n(P) = \int_0^1 P(t) t^n dt.$$

1. *Justifier, pour tout* $P \in \mathbb{R}[X]$, *l'existence de* $N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\theta_n(P)|$.
2. *Montrer que* N *est une norme sur* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 29.5

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. *Montrer que* $\|f\| = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$ *définit une norme sur* E.
2. *Montrer qu'il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leq C\|f\|.$$

Exercice 29.6 ( )

Soit $(E, \|\ \|)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé et* $K \subset E$ *une partie convexe, bornée, symétrique par rapport à l'origine et telle que* 0_E *soit intérieur à* K.
Pour $x \in E$, *posons* $N(x) = \inf\{|\lambda|, \frac{1}{\lambda}x \in K\}$. *Montrer que* N *est une norme équivalente à* $\|\ \|$.

Exercice 29.7

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ *ou sont-elles ouvertes ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ?*

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 < 1\}$
3. $\{z \in^*, \left|\frac{1+z}{z}\right| \leq \frac{1}{2}\}$
4. $\{z \in, \mathfrak{Re}(z^2) \leq 1\}$

Exercice 29.8

Soit O un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathrm{Vect}(O) = E$.

Exercice 29.9

Soit F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E.

1. *Montrer que $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E.*
2. *Montrer que si F différent de E, alors F est d'intérieur vide.*
3. *Montrer que, si E est de dimension finie, alors F ests fermé.*

Exercice 29.10

Soit E, F deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F. Montrer que f est continue si, et seulement si,

$$\forall\ A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Exercice 29.11

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, posons

$$N_1(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|, \qquad N_2(P) = \sup_{t\in[1,2]} |P(t)|.$$

Considérons l'application linéaire φ de $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P(0)$.

1. *Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.*
2. *Montrer que φ est continue pour N_1.*
3. *En introduisant les polynômes $(1 - \frac{X}{2})^n$, montrer que φ n'est pas continue pour N_2.*
4. *En déduire que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.*

Exercice 29.12

Soit $0 < r < R$.

1. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall P \in_n [X], \qquad \max\{|P(z)|,\ |z| \leq R\} \leq C \max\{|P(z)|,\ |z| \leq r\}.$$

2. *Existe-t-il $C > 0$ tel que*

$$\forall P \in [X], \qquad \max\{|P(z)|,\ |z| \leq R\} \leq C \max\{|P(z)|,\ |z| \leq r\}?$$

Exercice 29.13

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. *Soit n réels $x_1 < \ldots < x_n$, $c \in \mathbb{R}$ et*

$$P = c \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

Posons $y_0 = x_1 - 1$, $y_n = x_n + 1$ et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $y_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

   (a) *Montrer que l'application*

$$\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ Q & \mapsto & (Q(y_0)Q(y_1), \ldots, Q(y_{n-1})Q(y_n)) \end{cases}$$

   est continue.

   (b) *En déduire que $f^{-1}((\mathbb{R}_-^*)^n)$ est un ouvert contenant P et constitué de polynôme de degré n, scindés à racines simples.*

2. *Conclure que l'ensemble de polynôme de degré n, scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Exercice 29.14

Montrer qu'une classe de similitude dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est d'intérieur vide.

Exercice 29.15

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Déterminer l'adhérence dans $\mathcal{M}_n()$ de l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{M}_n()\ ;\ \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ M^p = I_n\}.$$

Chapitre 30

Introduction à la réduction

Exercice 30.1

Déterminer parmi les matrices suivantes celles qui sont diagonalisables :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 30.2

Montrer que, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, la matrice $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)}) \in \mathcal{M}_n()$ est diagonalisable.

Exercice 30.3 (*Brauer*)

La matrice de permutation associée à $\sigma \in S_n$ est la matrice $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$. Montrer que deux permutations σ et $\tau \in S_n$ sont conjuguées si, et seulement si, les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 30.4

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires a, b, c et d pour la diagonalisabilité de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}.$$

Exercice 30.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

La matrice $\begin{bmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ A & 0_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 30.6

Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible et $A = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ B & \mathrm{I}_n \end{bmatrix}$.

1. *Montrer que les valeurs propres complexes de B^2 appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_{2n}()$?*

Exercice 30.7

Soit E un -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel stable par u possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 30.8

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $B \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n+1$ et simplement scindé et u l'endomorphisme qui, à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 30.9

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & (X-a)P' \end{array} \right.$

Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 30.10

L'endomorphisme $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n$ est-il diagonalisable ?

Exercice 30.11

Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\mathrm{tr} A = 0$.

Exercice 30.12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + \mathrm{I}_n$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 30.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $\mathrm{rg} A = 0[2]$.

Exercice 30.14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + \mathrm{I}_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 30.15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $M_1, \dots, M_n \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, A, \dots, A^{n-1})$ tels que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad A^p = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^p M_k.$$

Exercice 30.16

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n()$ est unipotente s'il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $M^k = \mathrm{I}_n$. L'ordre de M est alors le plus petit entier naturel non nul k tel que $M^k = \mathrm{I}_n$.

1. *Montrer que toute matrice unipotente est diagonalisable.*
2. *Montrer que si M est unipotente d'ordre p, alors $M^k = \mathrm{I}_n$ si, et seulement si, $k \in p\mathbb{Z}$.*
3. *Soit V_n l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et O_n l'ensemble des ordres des éléments de V_n.*
   Montrer que V_n n'est pas vide et que O_n est fini.

Exercice 30.17

Soit u un endomorphisme d'un -espace vectoriel tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$.

Exercice 30.18

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes u et v tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
On pourra calculer $P(u) \circ v - v \circ P(u)$ pour $P(X) = X^k$ puis pour P le polynôme minimal de u.

Exercice 30.19

Soit E un -espace vectoriel de dimension finie, u et v des endomorphismes de E tels que

$$u \circ v - v \circ u \in \mathrm{Vect}(u, v).$$

Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.
On pourra commencer par le cas $u \circ v - v \circ u \in \mathrm{Vect}(v)$ puis s'y ramener.

Exercice 30.20

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n()$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. *les matrices A et B ont une valeur propre commune ;*
2. *il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n()$ non nulle telle que $AM = MB$;*
3. *la matrice $\mu_A(B)$ n'est pas inversible.*

Exercice 30.21

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ composé de matrices diagonalisables. Montrer que l'ordre de G est 2^k pour un certain $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 30.22

Montrer que toutes les matrices d'un sous-groupe G fini abélien de $\mathrm{GL}_n()$ sont co-diagonalisables.

Exercice 30.23

Soit $A \in \mathcal{M}_n()$.

1. *Déterminer les $P \in [X]$ tels que $P(A)$ est inversible.*
2. *Déterminer les $P \in [X]$ tels que $P(A)$ est nilpotent.*

Exercice 30.24

Soit $A \in \mathcal{M}_n()$. Montrer que $\{\mathrm{Ker}\, P(A),\ P \in [X]\}$ est fini.

Alphabet grec

Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ϵ, ε	
zeta	ζ	
eta	η	
theta	θ, ϑ	Θ
iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
xi	ξ	
omicron	o	
pi	π	Π
rho	ρ, ϱ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
upsilon	υ	
phi	ϕ, φ	Φ
psi	ψ	Ψ
chi	χ	
omega	ω	Ω

Trigonométrie élémentaire

Trigonométrie circulaire	**Trigonométrie hyperbolique**
Relation fondamentale	
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
Formules d'addition	
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$ $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$ $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}a + \mathrm{th}b}{1 + \mathrm{th}a\mathrm{th}b}$
Formules de factorisation	
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$	
Formules de linéarisation	
$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2x)), \qquad \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2x))$ $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin(3x)), \qquad \cos^3 x = \dfrac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos x)$	$\mathrm{sh}^2 x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(2x) - 1), \qquad \mathrm{ch}^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{ch}(2x))$
Formules d'angle moitié	
$\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(\theta) = \dfrac{2t}{1-t^2} \quad$ avec $t = \tan\frac{\theta}{2}$	
Formules de dérivation	
$\sin' = \cos,\ \cos' = -\sin$ $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$	$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch},\ \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$

I came as a king, I left as a legend

Développements limités usuels en 0

	$DL_n(0)$	$DL_5(0)$
exp	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
sin	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
cos	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$
sh	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
ch	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$	
$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$
$x \mapsto \ln(1-x)$	$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^k + o(x^n)$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$
$x \mapsto \ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$
$x \mapsto \arctan(x)$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$
$x \mapsto \arcsin(x)$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(2k+1)(2^k.k!)^2} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3.x^5}{40} + o(x^5)$

Lois de probabilité usuelles

loi	espérance	variance	fonction génératrice	interprétation	remarques
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$		loi d'une indicatrice d'un événement de probabilité p.
Rademacher	0	1			$2X-1$ où $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$	nombre de succès en n expériences indépendantes où la probabilité de succès est p	somme de n variables de loi $\mathcal{B}(p)$ indépendantes. La somme de deux variables binomiales indépendantes de même second paramètre est binomiale.
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$	nombre d'expériences indépendantes où la probabilité de succès est p avant d'avoir un succès	absence de mémoire.
$\mathcal{H}(n,a,b)$	$\frac{na}{a+b}$	$\frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$		nombre de boules blanches parmi les n tirées dans une urne à a boules blanches et b boules colorées	
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$		La somme de deux variables de Poisson indépendantes est de Poisson.