Stratégie gagnante ?

Ce document a été préparé par Roger Mansuy pour la journée d'animation du jeudi 8 novembre 2018 à l'atelier mathématique du Collège Henri Becquerel à Avoine.

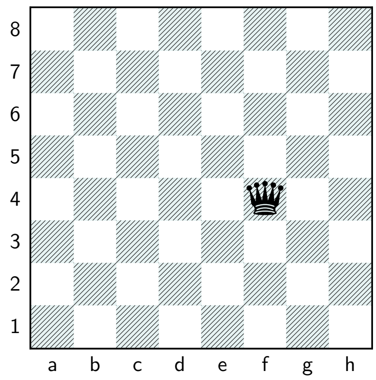
Dans ce document, on considère des jeux à deux joueurs qui jouent l'un après l'autre. Le premier à ne plus pouvoir jouer est déclaré perdant. On cherche à savoir s'il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs, c'est-à-dire une façon de jouer qui lui permette de gagner peu importe ce que fait son adversaire.

I Jeu de Wythoff

Décrivons le jeu inventé par le mathématicien hollandais Willem Abraham Wijthoff (6 octobre 1865 - 21 mai 1939), en anglais Wythoff.

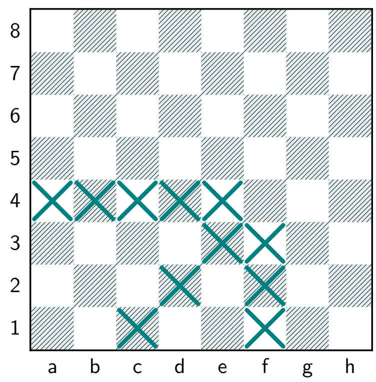
► Sur un échiquier (de taille 8×8, lignes numérotées de 1 à 8 et colonnes numérotées de a à h), on pose une seule pièce, une reine.

Par exemple, comme ceci



► À tour de rôle, les joueurs déplacent cette reine d'une ou plusieurs cases soit vers le bas, soit vers la gauche, soit en diagonale en bas et à gauche.

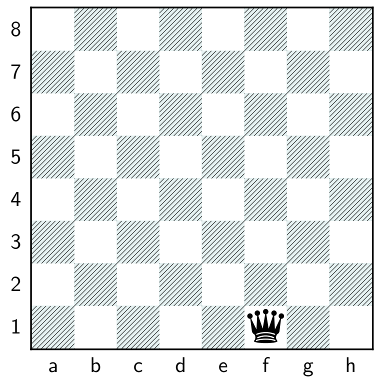
Voici les positions accessibles pour le premier joueur à partir de la configuration précédente :

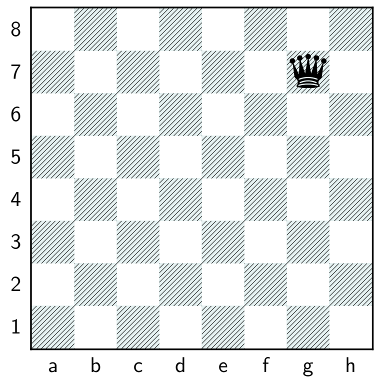


► Le joueur ne pouvant plus bouger la reine (car elle se trouve en case a1) a perdu.

Exercice 1.1

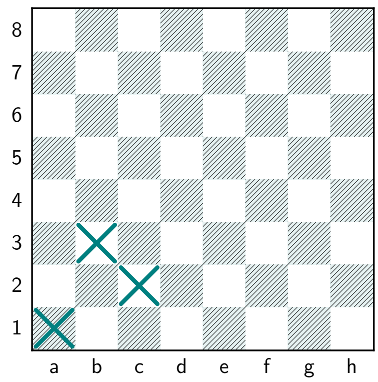
Expliquer pourquoi le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante dans les configurations suivantes :





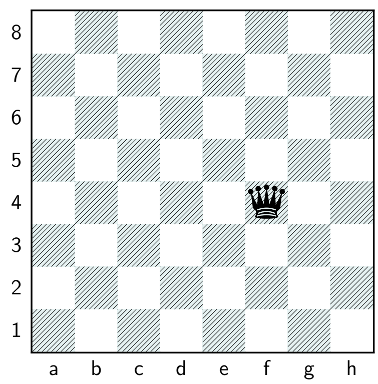
Exercice 1.2

Justifier que le deuxième joueur dispose d'une stratégie gagnante depuis les positions marquées ci-dessous



Exercice 1.3

Jouez-vous en premier ou en deuxième depuis cette configuration ?



Exercice 1.4

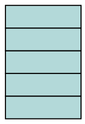
Trouver toutes les positions depuis lesquelles le deuxième joueur a une stratégie gagnante.

II Jeu de Grundy

Le jeu du mathématicien britannique Patrick Mickael Grundy (16 novembre 1917 – 4 novembre 1959) est un jeu de jetons dont voici les règles.

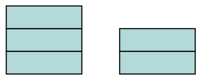
▶ Initialement, il y a un unique tas de jetons.

Par exemple, comme ceci avec 5 jetons



▶ À chaque étape, le joueur dont c'est le tour divise un tas de jetons en deux tas inégaux (ce dernier point est essentiel).

Voici une configuration accessible pour le premier joueur à partir de la configuration précédente :



▶ Le joueur qui ne peut plus subdiviser de tas a perdu.

Remarque 1

- *Une pile d'un ou deux jetons ne peut être divisée. À la fin d'une partie, il ne reste que des piles de un ou deux jetons.*
- *Une pile de trois jetons ne peut être divisée qu'en une pile de deux et une pile de un.*

Exercice 1.5

Montrer qu'il n'y a qu'une seule partie possible en partant d'une pile à 4 jetons.

Exercice 1.6

1. *Déterminer toutes les parties possibles depuis une pile à 5 jetons.*
2. *Si vous êtes le premier à jouer, que faites vous pour être sûr de gagner ?*

Exercice 1.7

1. *Expliquer le schéma suivant pour le jeu partant de 6 jetons*

$$\begin{tikzcd} & 6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 5,1 \arrow[d] \arrow[drr] & & 4,2 \arrow[d] \\ 4,1,1 \arrow[d] & & 3,2,1 \arrow[d] \\ 3,1,1,1 \arrow[d] & & 2,2,1,1 \\ 2,1,1,1,1 & & \end{tikzcd}$$

2. *Quelle stratégie adoptez-vous si vous jouez en premier ?*

Exercice 1.8

Expliquer comment savoir si le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante.

III Théorème de Sprague-Grundy

Précisons la définition de jeu.

Définition 2

Un jeu (au sens qui nous intéresse) est
- *à deux joueurs qui jouent à tour de rôle*
- *sans partie nulle*
- *sans partie infinie*
- *impartial*

Dans un tel jeu, le perdant est le premier joueur qui n'a plus de coup disponible.

Exemple 3

Les dames, les échecs, le Go ne sont pas des jeux au sens de cette définition. En revanche, les jeux de Wythoff et Grundy le sont.

Notre objectif est de comprendre le résultat suivant, appelé théorème de Roland Percival Sprague (11 juillet 1894 - 1 août 1967) et Grundy (déjà rencontré) qui assure l'existence d'une stratégie gagnante.

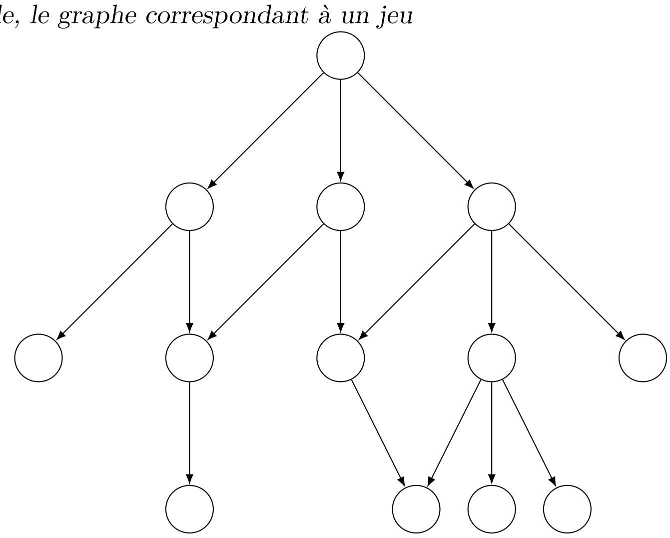
Proposition 4

L'un des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante (que l'autre joueur ne peut contre-carrer).

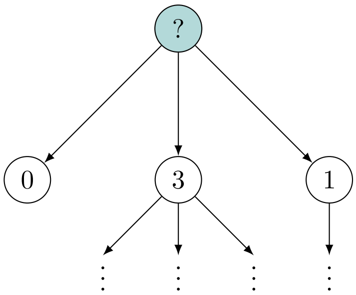
La première étape est de représenter le jeu sous la forme d'un graphique, ou plutôt d'un graphe, dont les sommets sont les configurations du jeu et dont les flèches indiquent qu'un joueur peut faire passer d'une configuration vers l'autre. Une partie sera donc le déplacement sur ce graphe : chaque joueur choisissant la flèche à suivre pour poursuivre la partie.

Exemple 5

Voici par exemple, le graphe correspondant à un jeu



La deuxième étape consiste à mettre des numéros sur le graphe précédent avec les deux règles suivantes :
- un sommet dont ne part aucune flèche aura le numéro 0,
- un autre sommet aura pour numéro le plus petit entier qui n'est pas présent parmi les sommets vers qui il mène.
  Par exemple, pour la portion de graphe suivante, le sommet marqué d'un ? *se voit attribuer le numéro* 2.



On admet qu'on peut ainsi numéroter sans ambiguïté toutes les configurations (c'est ce à quoi sert la définition de jeu ci-dessus).

Exercice 1.9

Mettre les numéros sur les sommets du graphe de l'exemple précédent.

Exercice 1.10

1. *Justifier que depuis une configuration numérotée* 0*, on ne peut pas aller vers une configuration numérotée* 0*.*
2. *Justifier que depuis une configuration avec un numéro strictement positif, on peut aller vers une configuration numérotée* 0*.*
3. *En déduire que si la configuration a un numéro strictement positif, alors le premier joueur à jouer depuis cette configuration dispose d'une stratégie gagnante (c'est-à-dire qu'il mènera à coup sûr son adversaire dans une configuration où il n'a plus de possibilité de jouer).*

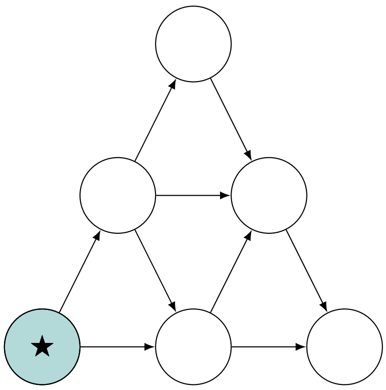
Exercice 1.11

Tracer le graphe du jeu de Grundy pour 7 *ou* 8 *jetons, donner sa numérotation et en déduire la stratégie gagnante pour l'un des joueurs.*

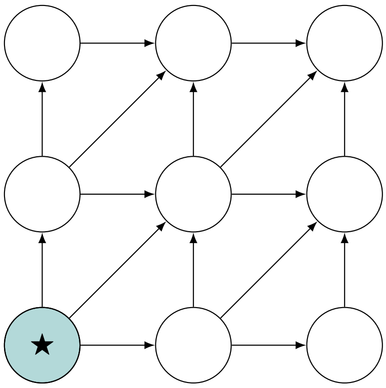
IV Application : un jeu sans nom

Voici un jeu simple : sur les « plateaux » suivants, un jeton est initialement placé sur la case marquée de ★. Les joueurs le déplacent à tour de rôle en suivant les flèches. Le premier à ne plus pouvoir bouger a perdu. Voulez-vous jouer en premier ?

Exercice 1.12



Exercice 1.13



Exercice 1.14