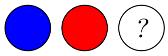
Le désordre n’existe pas

Ce document a été préparé par Roger Mansuy pour la journée d’animation du jeudi 8 novembre 2018 à l’atelier mathématique du Collège Henri Becquerel à Avoine.

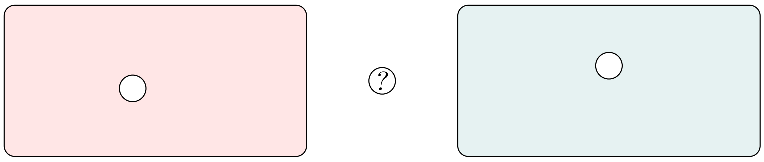
I Principe des tiroirs

Exemple 1

▷ *Quand on veut colorier 3 points avec 2 couleurs, il y a forcément au moins 2 points de la même couleur.*



▷ *Quand on veut ranger 3 objets dans 2 tiroirs, il y a forcément un tiroir qui en contient au moins 2.*



Proposition 2

Quand on place $n+1$ objets dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins 2 objets.

Voici un énoncé équivalent.

Proposition 3

On peut placer au maximum n objets dans n tiroirs sans qu’un tiroir contienne au moins 2 objets.

Preuve

Si dans chaque tiroir, il y a au plus un objet, alors on a placé au plus

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ fois}} = n$$

objets.

■

Remarque 4

Ce théorème s’appelle selon les langues : principe des tiroirs, das Schubfachprinzip, the pigeonhole principle. Le premier à l’avoir formalisé (mais pas à l’avoir utilisé) est le mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805 - 5 mai 1859) :

Exemple 5

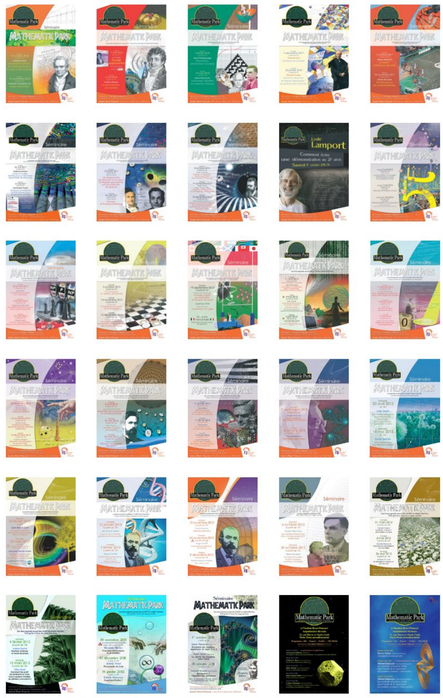
Dans cette salle, il y a au moins deux personnes dont le prénom commence par la même lettre.

Exemple 6

À Paris, il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre de cheveux.

Exercice 1.1

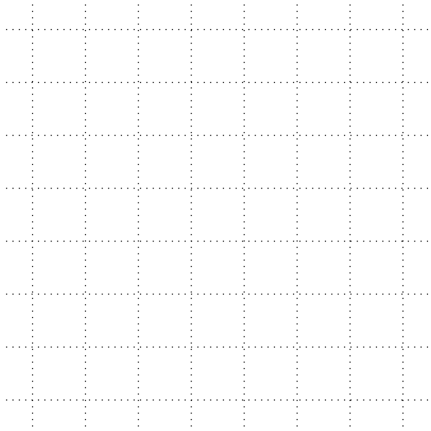
Voici quelques affiches d'un séminaire de mathématiques que j'organise avec quelques amis depuis sept ans



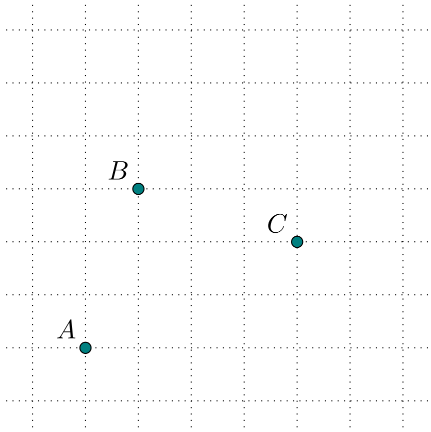
1. *Combien faut-il choisir d'affiches différentes pour être sûr d'en avoir 2 dans la même colonne ?*
2. *Combien faut-il choisir d'affiches différentes pour être sûr d'en avoir 2 dans la même ligne ?*

Exercice 1.2

1. *Placer un maximum de points aux intersections du quadrillage de sorte à ce qu'aucun milieu des points choisis ne soit sur le quadrillage.*



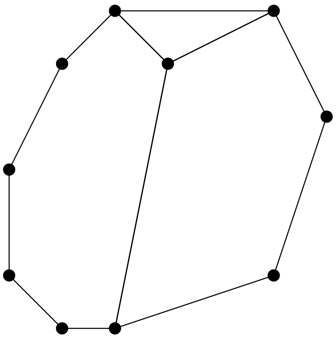
Par exemple, on ne peut pas choisir les points suivants car le milieu de A et C est sur le quadrillage



2. *Recommencer avec un quadrillage de l'espace à trois dimensions.*

Exercice 1.3

Montrer qu'un polyèdre convexe (solide de l'espace délimité par des plans) admet au moins deux faces ayant le même nombre de côtés.



Proposition 7

Quand on place $pn+1$ objets dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins $p+1$ objets.

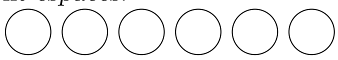
Exercice 1.4

Démontrer la proposition précédente.

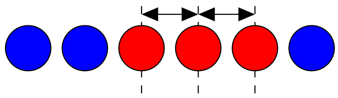
II Théorème de van der Waerden

Exercice 1.5

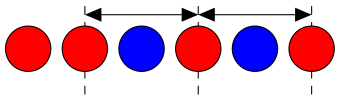
Colorier les six points suivants avec deux couleurs de sorte à ce qu'il n'y ait pas trois points de la même couleur régulièrement espacés.



Par exemple, vous ne pouvez pas adopter le coloriage suivant car il y a trois points rouges régulièrement espacés

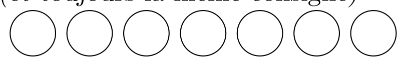


ni ce coloriage

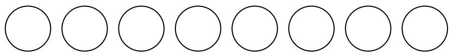


Exercice 1.6

Recommencer avec 7 points (et toujours la même consigne)

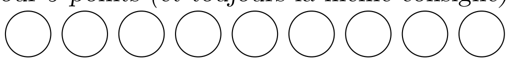


puis 8 points

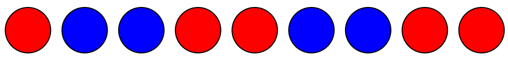


Exercice 1.7

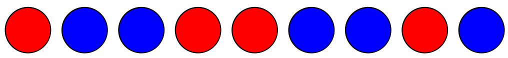
On veut recommencer pour 9 points (et toujours la même consigne)



1. *Combien existe-t-il de coloriages possibles ?*
2. *Le coloriage suivant convient-il ?*



3. *Le coloriage suivant convient-il ?*



4. *Traiter l'exercice avec la liste suivantes de tous les coloriages possibles.*

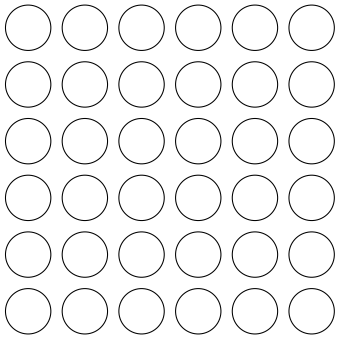
BBBBBBBBB	BBRBBBBBB	BRBBBBBBB	BRRBBBBBB	RBBBBBBBB	RBRBBBBBB	RRBBBBBBB	RRRBBBBBB
BBBBBBBBR	BBRBBBBBR	BRBBBBBBR	BRRBBBBBR	RBBBBBBBR	RBRBBBBBR	RRBBBBBBR	RRRBBBBBR
BBBBBBBRB	BBRBBBBRB	BRBBBBBRB	BRRBBBBRB	RBBBBBBRB	RBRBBBBRB	RRBBBBBRB	RRRBBBBRB
BBBBBBBRR	BBRBBBBRR	BRBBBBBRR	BRRBBBBRR	RBBBBBBRR	RBRBBBBRR	RRBBBBBRR	RRRBBBBRR
BBBBBBRBB	BBRBBBRBB	BRBBBBRBB	BRRBBBRBB	RBBBBBRBB	RBRBBBRBB	RRBBBBRBB	RRRBBBRBB
BBBBBBRBR	BBRBBBRBR	BRBBBBRBR	BRRBBBRBR	RBBBBBRBR	RBRBBBRBR	RRBBBBRBR	RRRBBBRBR
BBBBBBRRB	BBRBBBRRB	BRBBBBRRB	BRRBBBRRB	RBBBBBRRB	RBRBBBRRB	RRBBBBRRB	RRRBBBRRB
BBBBBBRRR	BBRBBBRRR	BRBBBBRRR	BRRBBBRRR	RBBBBBRRR	RBRBBBRRR	RRBBBBRRR	RRRBBBRRR
BBBBBRBBB	BBRBBRBBB	BRBBBRBBB	BRRBBRBBB	RBBBBRBBB	RBRBBRBBB	RRBBBRBBB	RRRBBRBBB
BBBBBRBBR	BBRBBRBBR	BRBBBRBBR	BRRBBRBBR	RBBBBRBBR	RBRBBRBBR	RRBBBRBBR	RRRBBRBBR
BBBBBRBRB	BBRBBRBRB	BRBBBRBRB	BRRBBRBRB	RBBBBRBRB	RBRBBRBRB	RRBBBRBRB	RRRBBRBRB
BBBBBRBRR	BBRBBRBRR	BRBBBRBRR	BRRBBRBRR	RBBBBRBRR	RBRBBRBRR	RRBBBRBRR	RRRBBRBRR
BBBBBRRBB	BBRBBRRBB	BRBBBRRBB	BRRBBRRBB	RBBBBRRBB	RBRBBRRBB	RRBBBRRBB	RRRBBRRBB
BBBBBRRBR	BBRBBRRBR	BRBBBRRBR	BRRBBRRBR	RBBBBRRBR	RBRBBRRBR	RRBBBRRBR	RRRBBRRBR
BBBBBRRRB	BBRBBRRRB	BRBBBRRRB	BRRBBRRRB	RBBBBRRRB	RBRBBRRRB	RRBBBRRRB	RRRBBRRRB
BBBBBRRRR	BBRBBRRRR	BRBBBRRRR	BRRBBRRRR	RBBBBRRRR	RBRBBRRRR	RRBBBRRRR	RRRBBRRRR
BBBBRBBBB	BBRBRBBBB	BRBBRBBBB	BRRBRBBBB	RBBBRBBBB	RBRBRBBBB	RRBBRBBBB	RRRBRBBBB
BBBBRBBBR	BBRBRBBBR	BRBBRBBBR	BRRBRBBBR	RBBBRBBBR	RBRBRBBBR	RRBBRBBBR	RRRBRBBBR
BBBBRBBRB	BBRBRBBRB	BRBBRBBRB	BRRBRBBRB	RBBBRBBRB	RBRBRBBRB	RRBBRBBRB	RRRBRBBRB
BBBBRBBRR	BBRBRBBRR	BRBBRBBRR	BRRBRBBRR	RBBBRBBRR	RBRBRBBRR	RRBBRBBRR	RRRBRBBRR
BBBBRBRBB	BBRBRBRBB	BRBBRBRBB	BRRBRBRBB	RBBBRBRBB	RBRBRBRBB	RRBBRBRBB	RRRBRBRBB
BBBBRBRBR	BBRBRBRBR	BRBBRBRBR	BRRBRBRBR	RBBBRBRBR	RBRBRBRBR	RRBBRBRBR	RRRBRBRBR
BBBBRBRRB	BBRBRBRRB	BRBBRBRRB	BRRBRBRRB	RBBBRBRRB	RBRBRBRRB	RRBBRBRRB	RRRBRBRRB
BBBBRBRRR	BBRBRBRRR	BRBBRBRRR	BRRBRBRRR	RBBBRBRRR	RBRBRBRRR	RRBBRBRRR	RRRBRBRRR
BBBBRRBBB	BBRBRRBBB	BRBBRRBBB	BRRBRRBBB	RBBBRRBBB	RBRBRRBBB	RRBBRRBBB	RRRBRRBBB
BBBBRRBBR	BBRBRRBBR	BRBBRRBBR	BRRBRRBBR	RBBBRRBBR	RBRBRRBBR	RRBBRRBBR	RRRBRRBBR
BBBBRRBRB	BBRBRRBRB	BRBBRRBRB	BRRBRRBRB	RBBBRRBRB	RBRBRRBRB	RRBBRRBRB	RRRBRRBRB
BBBBRRBRR	BBRBRRBRR	BRBBRRBRR	BRRBRRBRR	RBBBRRBRR	RBRBRRBRR	RRBBRRBRR	RRRBRRBRR
BBBBRRRBB	BBRBRRRBB	BRBBRRRBB	BRRBRRRBB	RBBBRRRBB	RBRBRRRBB	RRBBRRRBB	RRRBRRRBB
BBBBRRRBR	BBRBRRRBR	BRBBRRRBR	BRRBRRRBR	RBBBRRRBR	RBRBRRRBR	RRBBRRRBR	RRRBRRRBR
BBBBRRRRB	BBRBRRRRB	BRBBRRRRB	BRRBRRRRB	RBBBRRRRB	RBRBRRRRB	RRBBRRRRB	RRRBRRRRB
BBBBRRRRR	BBRBRRRRR	BRBBRRRRR	BRRBRRRRR	RBBBRRRRR	RBRBRRRRR	RRBBRRRRR	RRRBRRRRR
BBBRBBBBB	BBRRBBBBB	BRBRBBBBB	BRRRBBBBB	RBBRBBBBB	RBRRBBBBB	RRBRBBBBB	RRRRBBBBB
BBBRBBBBR	BBRRBBBBR	BRBRBBBBR	BRRRBBBBR	RBBRBBBBR	RBRRBBBBR	RRBRBBBBR	RRRRBBBBR
BBBRBBBRB	BBRRBBBRB	BRBRBBBRB	BRRRBBBRB	RBBRBBBRB	RBRRBBBRB	RRBRBBBRB	RRRRBBBRB
BBBRBBBRR	BBRRBBBRR	BRBRBBBRR	BRRRBBBRR	RBBRBBBRR	RBRRBBBRR	RRBRBBBRR	RRRRBBBRR
BBBRBBRBB	BBRRBBRBB	BRBRBBRBB	BRRRBBRBB	RBBRBBRBB	RBRRBBRBB	RRBRBBRBB	RRRRBBRBB
BBBRBBRBR	BBRRBBRBR	BRBRBBRBR	BRRRBBRBR	RBBRBBRBR	RBRRBBRBR	RRBRBBRBR	RRRRBBRBR
BBBRBBRRB	BBRRBBRRB	BRBRBBRRB	BRRRBBRRB	RBBRBBRRB	RBRRBBRRB	RRBRBBRRB	RRRRBBRRB
BBBRBBRRR	BBRRBBRRR	BRBRBBRRR	BRRRBBRRR	RBBRBBRRR	RBRRBBRRR	RRBRBBRRR	RRRRBBRRR
BBBRBRBBB	BBRRBRBBB	BRBRBRBBB	BRRRBRBBB	RBBRBRBBB	RBRRBRBBB	RRBRBRBBB	RRRRBRBBB
BBBRBRBBR	BBRRBRBBR	BRBRBRBBR	BRRRBRBBR	RBBRBRBBR	RBRRBRBBR	RRBRBRBBR	RRRRBRBBR
BBBRBRBRB	BBRRBRBRB	BRBRBRBRB	BRRRBRBRB	RBBRBRBRB	RBRRBRBRB	RRBRBRBRB	RRRRBRBRB
BBBRBRBRR	BBRRBRBRR	BRBRBRBRR	BRRRBRBRR	RBBRBRBRR	RBRRBRBRR	RRBRBRBRR	RRRRBRBRR
BBBRBRRBB	BBRRBRRBB	BRBRBRRBB	BRRRBRRBB	RBBRBRRBB	RBRRBRRBB	RRBRBRRBB	RRRRBRRBB
BBBRBRRBR	BBRRBRRBR	BRBRBRRBR	BRRRBRRBR	RBBRBRRBR	RBRRBRRBR	RRBRBRRBR	RRRRBRRBR
BBBRBRRRB	BBRRBRRRB	BRBRBRRRB	BRRRBRRRB	RBBRBRRRB	RBRRBRRRB	RRBRBRRRB	RRRRBRRRB
BBBRBRRRR	BBRRBRRRR	BRBRBRRRR	BRRRBRRRR	RBBRBRRRR	RBRRBRRRR	RRBRBRRRR	RRRRBRRRR
BBBRRBBBB	BBRRRBBBB	BRBRRBBBB	BRRRRBBBB	RBBRRBBBB	RBRRRBBBB	RRBRRBBBB	RRRRRBBBB
BBBRRBBBR	BBRRRBBBR	BRBRRBBBR	BRRRRBBBR	RBBRRBBBR	RBRRRBBBR	RRBRRBBBR	RRRRRBBBR
BBBRRBBRB	BBRRRBBRB	BRBRRBBRB	BRRRRBBRB	RBBRRBBRB	RBRRRBBRB	RRBRRBBRB	RRRRRBBRB
BBBRRBBRR	BBRRRBBRR	BRBRRBBRR	BRRRRBBRR	RBBRRBBRR	RBRRRBBRR	RRBRRBBRR	RRRRRBBRR
BBBRRBRBB	BBRRRBRBB	BRBRRBRBB	BRRRRBRBB	RBBRRBRBB	RBRRRBRBB	RRBRRBRBB	RRRRRBRBB
BBBRRBRBR	BBRRRBRBR	BRBRRBRBR	BRRRRBRBR	RBBRRBRBR	RBRRRBRBR	RRBRRBRBR	RRRRRBRBR
BBBRRBRRB	BBRRRBRRB	BRBRRBRRB	BRRRRBRRB	RBBRRBRRB	RBRRRBRRB	RRBRRBRRB	RRRRRBRRB
BBBRRBRRR	BBRRRBRRR	BRBRRBRRR	BRRRRBRRR	RBBRRBRRR	RBRRRBRRR	RRBRRBRRR	RRRRRBRRR
BBBRRRBBB	BBRRRRBBB	BRBRRRBBB	BRRRRRBBB	RBBRRRBBB	RBRRRRBBB	RRBRRRBBB	RRRRRRBBB
BBBRRRBBR	BBRRRRBBR	BRBRRRBBR	BRRRRRBBR	RBBRRRBBR	RBRRRRBBR	RRBRRRBBR	RRRRRRBBR
BBBRRRBRB	BBRRRRBRB	BRBRRRBRB	BRRRRRBRB	RBBRRRBRB	RBRRRRBRB	RRBRRRBRB	RRRRRRBRB
BBBRRRBRR	BBRRRRBRR	BRBRRRBRR	BRRRRRBRR	RBBRRRBRR	RBRRRRBRR	RRBRRRBRR	RRRRRRBRR
BBBRRRRBB	BBRRRRRBB	BRBRRRRBB	BRRRRRRBB	RBBRRRRBB	RBRRRRRBB	RRBRRRRBB	RRRRRRRBB
BBBRRRRBR	BBRRRRRBR	BRBRRRRBR	BRRRRRRBR	RBBRRRRBR	RBRRRRRBR	RRBRRRRBR	RRRRRRRBR
BBBRRRRRB	BBRRRRRRB	BRBRRRRRB	BRRRRRRRB	RBBRRRRRB	RBRRRRRRB	RRBRRRRRB	RRRRRRRRB
BBBRRRRRR	BBRRRRRRR	BRBRRRRRR	BRRRRRRRR	RBBRRRRRR	RBRRRRRRR	RRBRRRRRR	RRRRRRRRR

Remarque 8

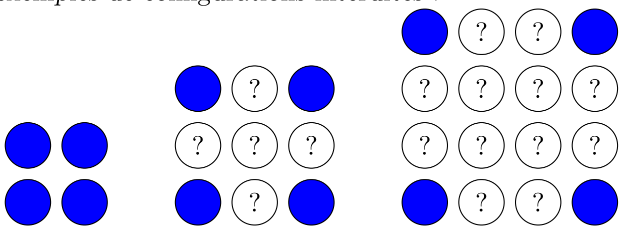
Le résultat de cet exercice est du au mathématicien hollandais Bartel Leendert van der Waerden (2 février 1903 - 12 janvier 1996)

Exercice 1.8

Colorier les 36 points suivants avec deux couleurs sans qu'il y ait de carré avec les quatre sommets de la même couleur.



Donnons quelques exemples de configurations interdites :

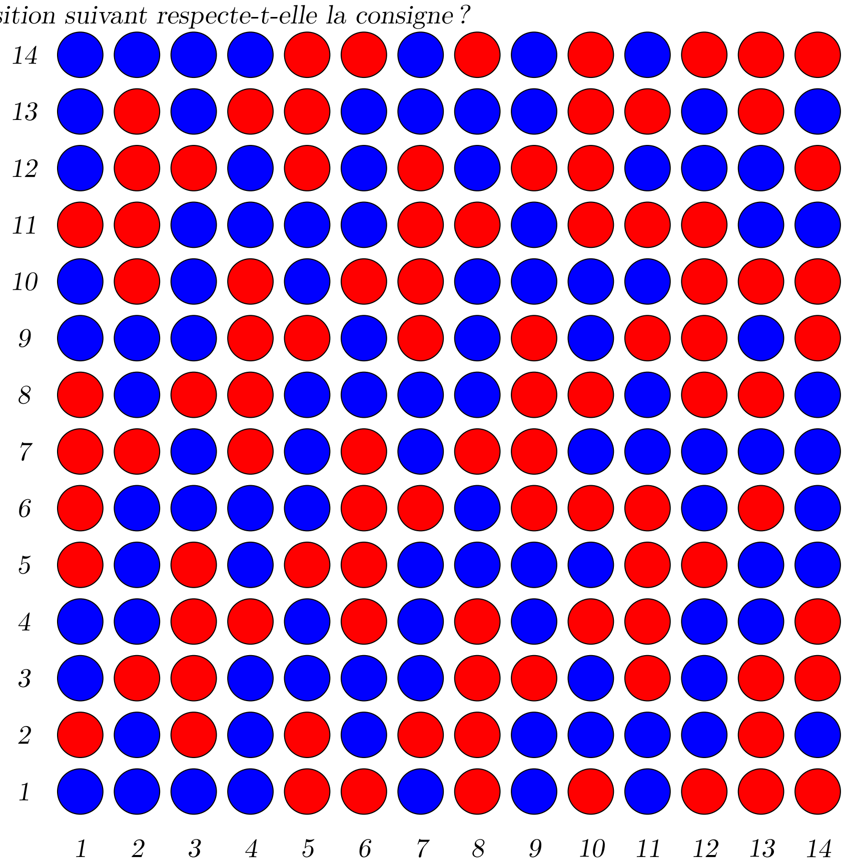


Remarque 9

Il a été montré que la taille maximale sans carré monochrome était 14×14 *mais on ne peut pas énumérer tous les coloriages cette fois-ci (car il y en a beaucoup trop, approximativement un nombre fait d'un 1 suivi de cinquante-neuf 0).*

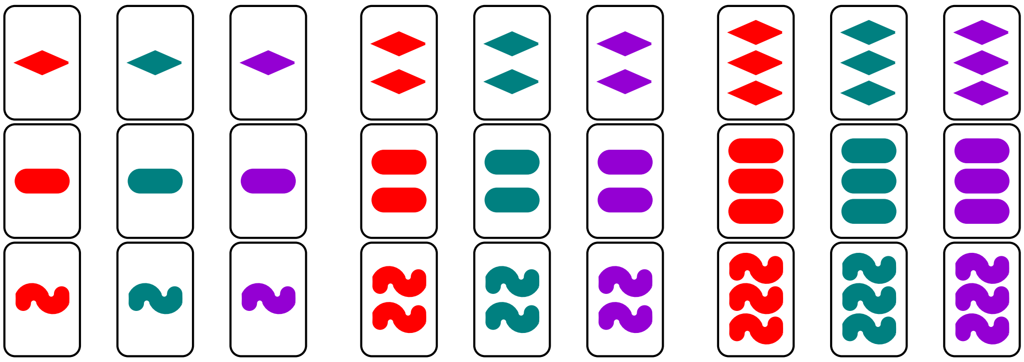
Exercice 1.9

La proposition suivant respecte-t-elle la consigne ?



III Mini-Set

Considérons les cartes suivantes (version simplifiée du jeu de Set, inventé par Marsha Falco en1974 ; tous droits réservés par *Set Enterprises*) :



Le jeu comporte 27 cartes et sur chacune d'entre elles, on trouve

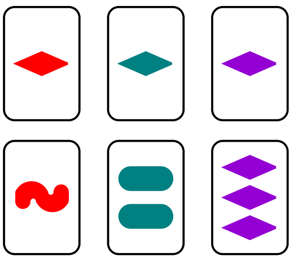
— des motifs : losange, ovale ou vague

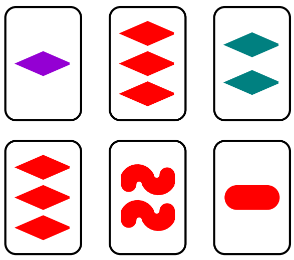
— en nombre : 1, 2 ou 3

— de couleur : verte, rouge ou violette

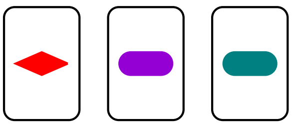
On pose 9 cartes sur la table ; chaque joueur doit trouver un lot de 3 cartes, appelé mini-Set, tel que, pour chacun des trois critères, les trois cartes ont la même valeur ou ont toutes des valeurs différentes.

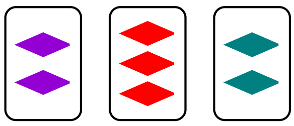
Voici quatre exemples de mini-Set





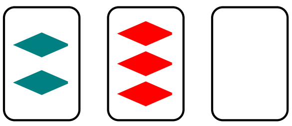
En revanche, ceci ne sont pas des mini-Sets

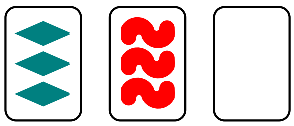


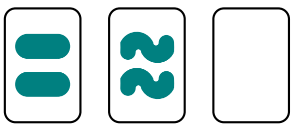


Exercice 1.10

Compléter les lots de deux cartes suivants de sorte à obtenir un set

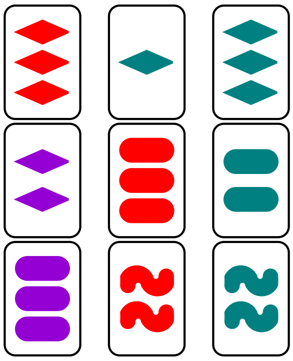


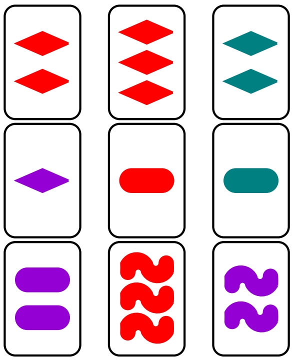




Exercice 1.11

Trouver des mini-Sets dans les donnes suivantes

1. 

2. 

Exercice 1.12

Chercher le nombre minimal de cartes à poser sur la table pour être sûr d'obtenir un mini-Set.

Remarque 10

Dans la version authentique du jeu de Set, les cartes ont quatre attributs : motif, nombre, couleur (comme précédemment) mais aussi texture (plein, creux ou hachuré). La règle pour construire un Set est la même et on a montré qu'il fallait 21 *cartes pour être sûr d'obtenir un Set.*