Des probas... où on ne les attend pas

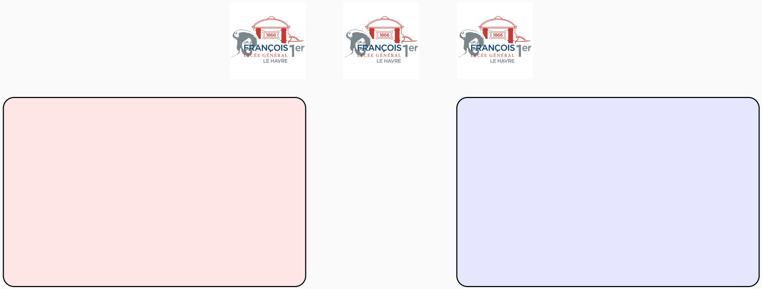
Roger Mansuy

Lycée François Ier, Le Havre

19 janvier 2022

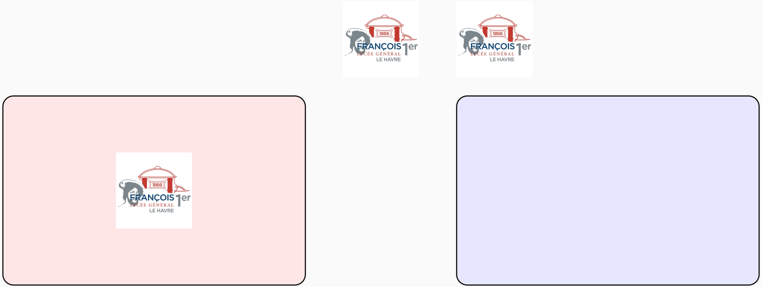
Introduction

Après la journée portes ouvertes au lycée François Ier, madame la proviseure range les plaquettes du lycée dans deux tiroirs.



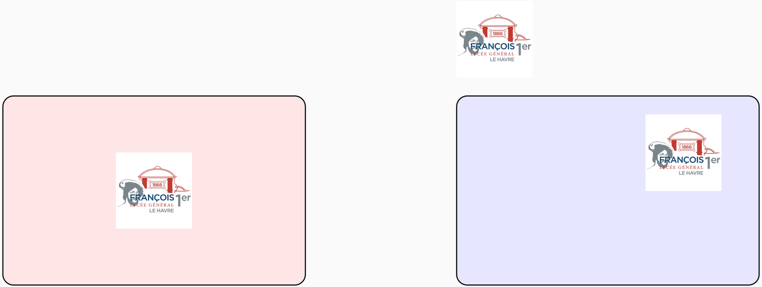
Introduction

Après la journée portes ouvertes au lycée François Ier, madame la proviseure range les plaquettes du lycée dans deux tiroirs.



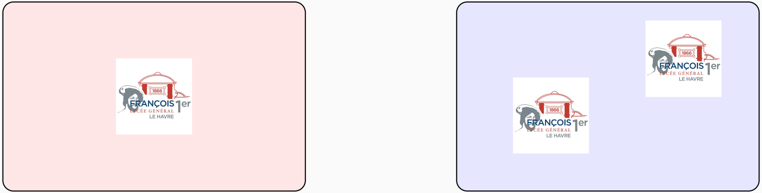
Introduction

Après la journée portes ouvertes au lycée François Ier, madame la proviseure range les plaquettes du lycée dans deux tiroirs.



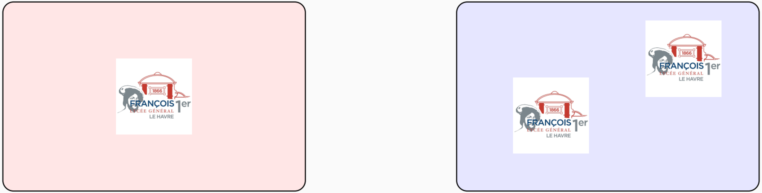
Introduction

Après la journée portes ouvertes au lycée François Ier, madame la proviseure range les plaquettes du lycée dans deux tiroirs.



Introduction

Après la journée portes ouvertes au lycée François Ier, madame la proviseure range les plaquettes du lycée dans deux tiroirs.



Peu importe la façon de ranger ces trois plaquettes : il y a au moins 2 plaquettes dans le même tiroir.

Proposition

Soit n un entier non nul. Lorsque l'on range $n+1$ objets dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins 2 objets.

Proposition

Soit n un entier non nul. Lorsque l'on range $n+1$ objets dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins 2 objets.

Proposition

Soit n un entier non nul et $f : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n]\!]$. Alors, f n'est pas injective.

Proposition

Soit n et k deux entiers non nuls. Lorsque l'on range $kn+1$ objets dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins $k+1$ objets.

Proposition

Soit n et k deux entiers non nuls. Lorsque l'on range $kn+1$ objets dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins $k+1$ objets.

Proposition

Soit n, k deux entiers non nuls et $f : [\![1, kn+1]\!] \to [\![1, n]\!]$. Alors, il existe $p \in [\![1, n]\!]$ qui admet au moins $k+1$ antécédents par f.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805 - 5 mai 1859)

- Allemand
- Mathématicien (arithmétique, analyse harmonique...)
- Beau-frère des compositeurs Fanny et Felix Mendelssohn

Un peu de théorie de Ramsey

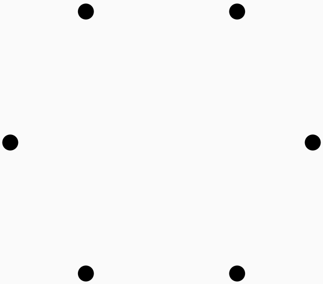
Proposition

Six personnes sont dans une pièce. Alors on peut toujours trouver

- soit trois qui se connaissent toutes mutuellement,
- soit trois qui se croisent toutes pour la première fois.

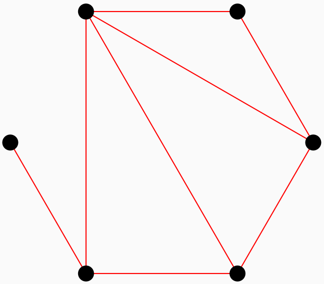
Représentons la situation par un graphe.

- Chaque personne est représentée par un sommet.



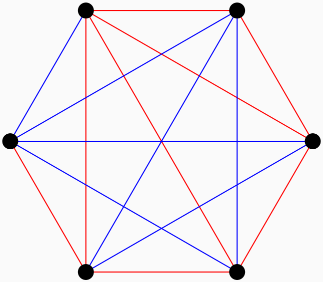
Représentons la situation par un graphe.

- Chaque personne est représentée par un sommet.
- Deux sommets correspondant à des personnes se connaissant sont reliés par une arête rouge.



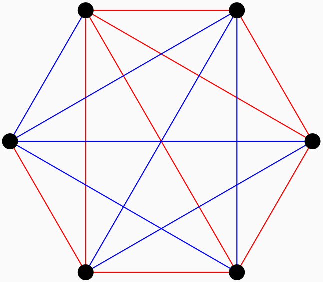
Représentons la situation par un graphe.

- Chaque personne est représentée par un sommet.
- Deux sommets correspondant à des personnes se connaissant sont reliés par une arête rouge.
- Deux sommets correspondant à des personnes ne se connaissant pas sont reliés par une arête bleue.



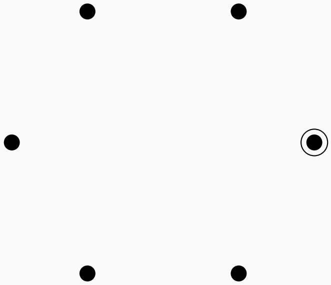
Représentons la situation par un graphe.

- Chaque personne est représentée par un sommet.
- Deux sommets correspondant à des personnes se connaissant sont reliés par une arête rouge.
- Deux sommets correspondant à des personnes ne se connaissant pas sont reliés par une arête bleue.

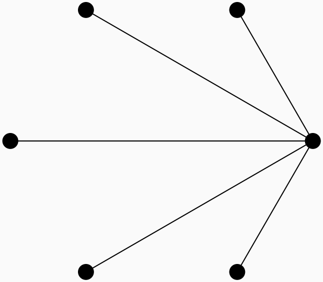


Pour établir la proposition, il suffit de prouver qu'il existe un triangle d'une seule couleur quel que soit le coloriage de ce graphe.

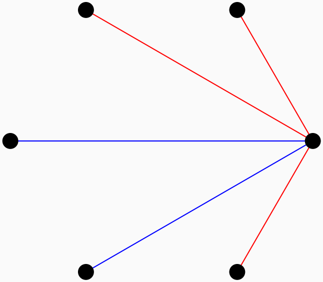
Considérons un sommet.



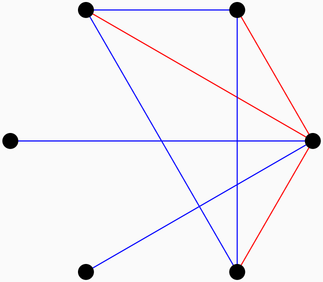
Considérons un sommet.



Considérons un sommet. Les 5 arêtes partant de ce sommet sont coloriées soit en bleu, soit en rouge : il en existe donc au moins 3 de la même couleur, par exemple, rouge.

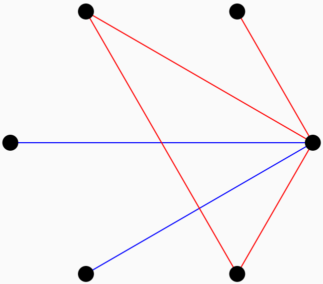


Considérons un sommet. Les 5 arêtes partant de ce sommet sont coloriées soit en bleu, soit en rouge : il en existe donc au moins 3 de la même couleur, par exemple, rouge.



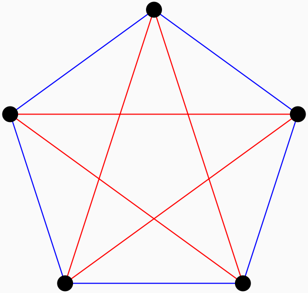
▷ Si les trois sommets reliés par des arêtes rouges au sommet fixé sont reliés entre eux par des arêtes bleues, alors il y a un triangle bleu.

Considérons un sommet. Les 5 arêtes partant de ce sommet sont coloriées soit en bleu, soit en rouge : il en existe donc au moins 3 de la même couleur, par exemple, rouge.



▷ Si les trois sommets reliés par des arêtes rouges au sommet fixé sont reliés entre eux par des arêtes bleues, alors il y a un triangle bleu.
▷ Sinon, deux de ces sommets sont reliés par une arête rouge : ils forment un triangle rouge (avec le sommet fixé).

En revanche, le théorème n'est plus toujours vrai pour seulement cinq personnes comme on peut le voir avec le graphe suivant où il n'existe pas de triangle d'une seule couleur.



▷ Si l'on dispose 3 plaquettes dans 2 tiroirs, il y a au moins 2 plaquettes dans le même tiroir

▷ Si l'on réunit 6 personnes, il y a au moins « triangle » monochrome

▷ Si l'on dispose 3 plaquettes dans 2 tiroirs, il y a au moins 2 plaquettes dans le même tiroir (mais avec 2 plaquettes...)

▷ Si l'on réunit 6 personnes, il y a au moins « triangle » monochrome (mais avec 5 personnes...)

Proposition

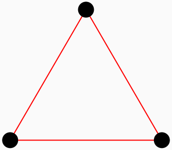
Neuf personnes sont dans une pièce. Alors, on peut toujours trouver

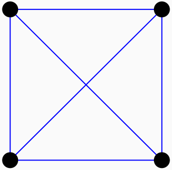
- soit trois qui se connaissent toutes mutuellement,
- soit quatre qui se croisent toutes pour la première fois.

Proposition

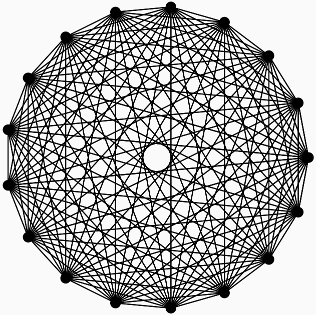
Neuf personnes sont dans une pièce. Alors, on peut toujours trouver

- soit trois qui se connaissent toutes mutuellement,
- soit quatre qui se croisent toutes pour la première fois.

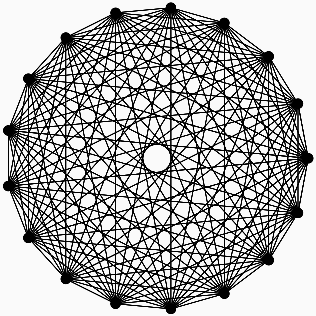




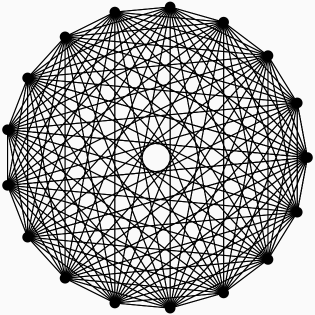
Un graphe à k sommets est complet quand on trace toutes les arêtes possibles entre ces k sommets



Un graphe à k sommets est complet quand on trace toutes les arêtes possibles entre ces k sommets (soit $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ arêtes)



Un graphe à k sommets est complet quand on trace toutes les arêtes possibles entre ces k sommets (soit $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ arêtes)



On retrouve un triangle pour $k = 3$ et le carré avec diagonales pour $k = 4$.

Théorème

Soit p et q des entiers supérieurs à 2 fixés. Alors, il existe un entier N tel que tout coloriage du graphe complet à N sommets en deux couleurs rouge et bleu contient

- soit un sous-graphe complet rouge à p sommets,
- soit un sous-graphe complet bleu à q sommets.

Notons $R(p, q)$ le plus petit entier N vérifiant la conclusion de ce théorème.

Frank Plumpton Ramsey (22 février 1903 - 19 janvier 1930)

- Britannique
- Logicien, économiste, mathématicien
- Frère de l'archevêque de Cantorbury
- Mort d'une maladie du foie

Proposition

$$R(3,3) = 6.$$

Proposition

Pour tout entier q supérieur à 2,

$$R(2,q) = q.$$

Voici toutes les valeurs connues de $R(p,q)(= R(q,p))$ pour $p,\ q \geq 3$:

	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				
5	14	25					
6	18						
7	23						
8	28						
9	36						

Supposons que des extraterrestres envahissent la Terre et menacent de l'anéantir dans un an si les êtres humains ne parviennent pas à trouver le nombre de Ramsey pour cinq rouges et cinq bleus. Nous pourrions réunir les meilleurs esprits et les ordinateurs les plus rapides du monde et, en un an, nous pourrions probablement calculer cette valeur.

Si les extraterrestres demandaient le nombre de Ramsey pour six rouges et six bleus, nous n'aurions d'autre choix que de lancer une attaque préventive.

Pál Erdős

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Proposition

$$R(6,6) > 17.$$

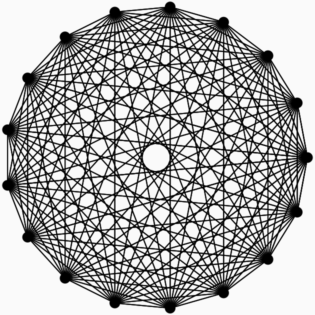
Nous allons démontrer le résultat suivant :

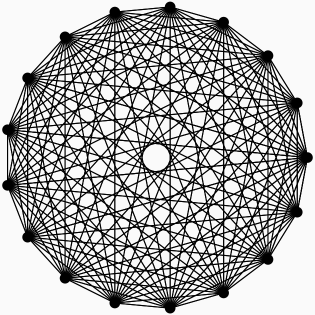
Proposition

$$R(6,6) > 17.$$

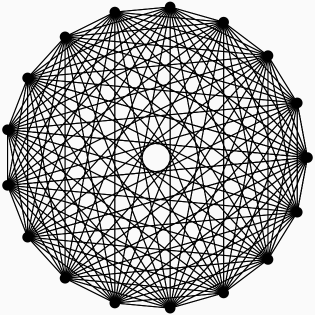
Proposition

Il existe une coloration du graphe complet à 17 sommets qui n'admet pas de sous-graphe complet monochrome à 6 sommets.

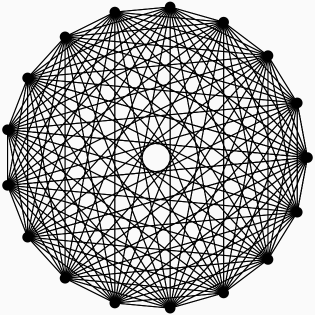




- Il y a $2^{\binom{17}{2}} = 2^{136} \approx 8,7.10^{40}$ coloriages du graphe à 17 sommets,



- Il y a $2^{\binom{17}{2}} = 2^{136} \approx 8,7.10^{40}$ coloriages du graphe à 17 sommets,
- et chacun comporte $\binom{17}{6} = 12376$ sous-graphes à 6 sommets (et donc 15 arêtes).



- Il y a $2^{\binom{17}{2}} = 2^{136} \approx 8,7.10^{40}$ coloriages du graphe à 17 sommets,
- et chacun comporte $\binom{17}{6} = 12376$ sous-graphes à 6 sommets (et donc 15 arêtes).

La vérification exhaustive serait plutôt longue, non ?

La méthode probabiliste

Esther Szekeres (20 février 1910 – 28 août 2005),
George Szekeres (29 mai 1911 – 28 août 2005),
Pál Erdős (26 mars 1913 - 20 septembre 1996)

- Hongrois
- Mathématiciens (combinatoire)

La « méthode probabiliste » repose sur trois étapes

1. On cherche une solution X du problème déterministe au hasard

La « méthode probabiliste » repose sur trois étapes

1. On cherche une solution X du problème déterministe au hasard
2. On calcule l'espérance de cette variable aléatoire

La « méthode probabiliste » repose sur trois étapes

1. On cherche une solution X du problème déterministe au hasard
2. On calcule l'espérance de cette variable aléatoire
3. On applique le lemme suivant :

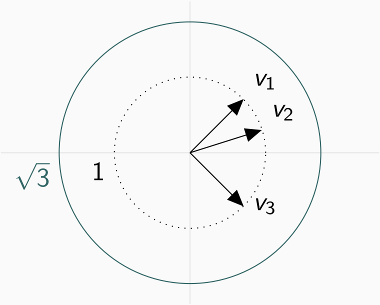
Lemme

Soit X une variable aléatoire réelle discrète d'espérance m. Alors, il existe une valeur prise par X inférieure ou égale à m.

Exercice

Soit v_1, ..., v_n des vecteurs de norme 1. Montrer qu'il existe des signes ε_1, ..., $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

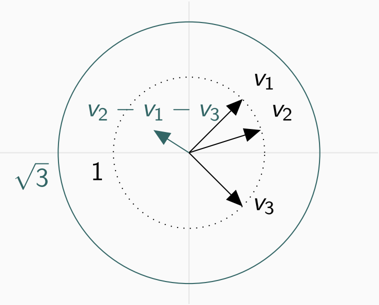
$$\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}.$$



Exercice

Soit v_1, ..., v_n des vecteurs de norme 1. Montrer qu'il existe des signes ε_1, ..., $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}.$$



Considérons X_1, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi donnée par

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \tfrac{1}{2},$$

puis construisons la variable aléatoire $U = X_1 v_1 + \cdots + X_n v_n$.
Alors,

$$\begin{aligned}\|U\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} X_i v_i \middle| \sum_{j=1}^{n} X_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_i | v_j \rangle X_i X_j.\end{aligned}$$

Calculons l'espérance de la variable aléatoire réelle $\|U\|^2$ avec la linéarité.

$$\mathbf{E}\left(\|U\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_i | v_j \rangle \mathbf{E}(X_i X_j).$$

Notons que, pour des entiers distincts i et j, on obtient

$$\mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j) = 0,$$

Calculons l'espérance de la variable aléatoire réelle $\|U\|^2$ avec la linéarité.

$$\mathbf{E}\big(\|U\|^2\big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_i | v_j \rangle \mathbf{E}(X_i X_j).$$

Notons que, pour des entiers distincts i et j, on obtient

$$\mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j) = 0,$$

donc

$$\mathbf{E}\big(\|U\|^2\big) = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2 \mathbf{E}(X_i^2).$$

Par ailleurs, pour tout entier i, $\mathbf{E}(X_i^2) = \mathbf{E}(1) = 1$, d'où

$$\mathbf{E}\left(\|U\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2.$$

Par ailleurs, pour tout entier i, $\mathbf{E}(X_i^2) = \mathbf{E}(1) = 1$, d'où

$$\mathbf{E}\left(\|U\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2.$$

Comme par hypothèse les vecteurs v_i sont unitaires, on obtient finalement,

$$\mathbf{E}\left(\|U\|^2\right) = n.$$

Par ailleurs, pour tout entier i, $\mathbf{E}(X_i^2) = \mathbf{E}(1) = 1$, d'où

$$\mathbf{E}\left(\|U\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2.$$

Comme par hypothèse les vecteurs v_i sont unitaires, on obtient finalement,

$$\mathbf{E}\left(\|U\|^2\right) = n.$$

Avec le lemme, il existe une réalisation de U telle que $\|U\|^2 \leq n$.

Revenons aux questions de graphes et de théorie de Ramsey.

Fixons n un entier supérieur à 2. Considérons un graphe aléatoire à n sommets tel que chaque arête est coloriée

- en rouge avec probabilité $\frac{1}{2}$,

Revenons aux questions de graphes et de théorie de Ramsey.

Fixons n un entier supérieur à 2. Considérons un graphe aléatoire à n sommets tel que chaque arête est coloriée

- en rouge avec probabilité $\frac{1}{2}$,
- en bleu avec probabilité $\frac{1}{2}$,

Revenons aux questions de graphes et de théorie de Ramsey.

Fixons n un entier supérieur à 2. Considérons un graphe aléatoire à n sommets tel que chaque arête est coloriée

- en rouge avec probabilité $\frac{1}{2}$,
- en bleu avec probabilité $\frac{1}{2}$,
- indépendamment de toutes les autres.

Proposition

En moyenne, le graphe aléatoire comporte $\frac{n(n-1)}{4}$ arêtes rouges.

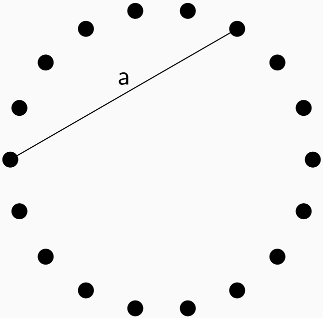
Proposition

En moyenne, le graphe aléatoire comporte $\frac{n(n-1)}{4}$ arêtes rouges.

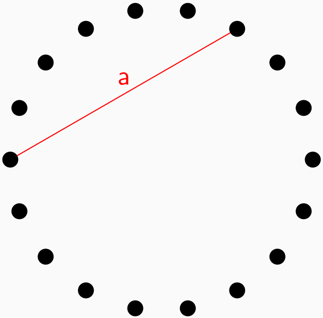
Proposition

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'arêtes rouges dans le graphe aléatoire. Alors, $\mathbf{E}(X) = \frac{n(n-1)}{4}$.

Notons, pour chaque arête a, $\mathbb{1}_a$ la variable aléatoire qui vaut 1 si a est rouge, 0 sinon.

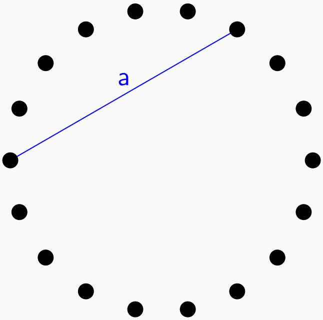


Notons, pour chaque arête a, $\mathbb{1}_a$ la variable aléatoire qui vaut 1 si a est rouge, 0 sinon.



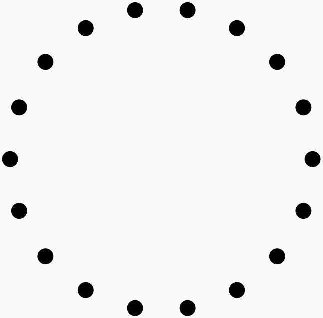
$$\mathbb{1}_a = 1$$

Notons, pour chaque arête a, $\mathbb{1}_a$ la variable aléatoire qui vaut 1 si a est rouge, 0 sinon.



$$\mathbb{1}_a = 0$$

Notons, pour chaque arête a, $\mathbb{1}_a$ la variable aléatoire qui vaut 1 si a est rouge, 0 sinon.



Alors,

$$X = \sum_a \mathbb{1}_a.$$

Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}\Big(\sum_a \mathbb{1}_a\Big)\\ &= \sum_a \mathbf{E}(\mathbb{1}_a)\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}\Big(\sum_a \mathbb{1}_a\Big)\\ &= \sum_a \mathbf{E}(\mathbb{1}_a)\\ &= \sum_a \left(\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}0\right)\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}\Big(\sum_a \mathbb{1}_a\Big) \\
&= \sum_a \mathbf{E}(\mathbb{1}_a) \\
&= \sum_a \left(\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}0\right) \\
&= \binom{n}{2}\frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.
\end{aligned}$$

Proposition

Soit N_3 la variable aléatoire égale au nombre de triangles rouges dans le graphe aléatoire. Alors, $\mathbf{E}(N_3) = \binom{n}{3}\frac{1}{8}$.

Notons, pour chaque triangle t, $\mathbb{1}_t$ la variable aléatoire qui vaut 1 si t est rouge, 0 sinon.
Alors,

$$N_3 = \sum_t \mathbb{1}_t,$$

Notons, pour chaque triangle t, $\mathbb{1}_t$ la variable aléatoire qui vaut 1 si t est rouge, 0 sinon.
Alors,

$$N_3 = \sum_t \mathbb{1}_t,$$

puis par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(N_3) &= \sum_t \mathbf{E}(\mathbb{1}_t) \\ &= \sum_t \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 1 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) 0 \right) \\ &= \binom{n}{3} \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Proposition

Soit N_k la variable aléatoire égale au nombre de sous-graphes complets à k sommets avec arêtes toutes rouges dans le graphe aléatoire. Alors, $\mathbf{E}(N_k) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$.

Proposition

Soit N_k la variable aléatoire égale au nombre de sous-graphes complets à k sommets avec arêtes toutes rouges dans le graphe aléatoire. Alors, $\mathbf{E}(N_k) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$.

Proposition

Soit N'_k la variable aléatoire égale au nombre de sous-graphes complets à k sommets entièrement avec arêtes toutes bleues dans le graphe aléatoire. Alors, $\mathbf{E}(N'_k) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$.

Proposition

Soit N la variable aléatoire égale au nombre de sous-graphes complets à k sommets avec arêtes toutes de la même couleur dans le graphe aléatoire. Alors, $\mathbf{E}(N) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$.

Proposition

Soit N la variable aléatoire égale au nombre de sous-graphes complets à k sommets avec arêtes toutes de la même couleur dans le graphe aléatoire. Alors, $\mathbf{E}(N) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$.

Il suffit de noter que $N = N_k + N'_k$

Proposition

Soit N la variable aléatoire égale au nombre de sous-graphes complets à k sommets avec arêtes toutes de la même couleur dans le graphe aléatoire. Alors, $\mathbf{E}(N) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$.

Il suffit de noter que $N = N_k + N'_k$ puis d'utiliser la linéarité de l'espérance et les résultats précédents

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N) &= \mathbf{E}(N_k) + \mathbf{E}(N'_k) \\
&= \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} + \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \\
&= \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.
\end{aligned}$$

En appliquant à nouveau le lemme, on obtient

Théorème

Si $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, alors il existe une coloration du graphe complet à n sommets qui n'admet aucun sous-graphe complet à k sommets monochromes.

En appliquant à nouveau le lemme, on obtient

Théorème

Si $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, alors il existe une coloration du graphe complet à n sommets qui n'admet aucun sous-graphe complet à k sommets monochromes.

En particulier avec $n = 17$ et $k = 6$,

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{\binom{17}{6}}{2^{14}} = \frac{12376}{16384} < 1.$$

Le résultat annoncé est établi !

Théorème

Pour tout entier $k \geq 3$,

$$R(k,k) > \frac{1}{\sqrt{2}e} 2^{-\frac{1}{k}} k 2^{\frac{k}{2}}.$$

Théorème

Pour tout entier $k \geq 3$,

$$R(k,k) > \frac{1}{\sqrt{2}e} 2^{-\frac{1}{k}} k 2^{\frac{k}{2}}.$$

Avec le théorème précédent, il suffit d'établir que l'entier $n = \frac{1}{\sqrt{2}e} 2^{-\frac{1}{k}} k 2^{\frac{k}{2}}$ vérifie l'inégalité en hypothèse. Or,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}+1} &< \frac{n^k}{k!} 2^{-\binom{k}{2}+1} \\ &< e^{-k} 2^{-\frac{k}{2}-1} k^k 2^{\frac{k^2}{2}} \frac{e^k}{k^k} 2^{-\binom{k}{2}+1} \\ &< 1, \end{aligned}$$

en utilisant la minoration $k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$.

On peut préférer la minoration plus maniable : pour tout entier $k \geq 3$,

$$R(k,k) > k2^{\frac{k}{2}-2}.$$

On peut préférer la minoration plus maniable : pour tout entier $k \geq 3$,

$$R(k,k) > k2^{\frac{k}{2}-2}.$$

En particulier, $R(6,6) > 12$: résultat plus faible que celui déjà démontré.

Conclusion

Le hasard permet d'étudier une situation avec de nombreux cas sans avoir à tous les énumérer.

Conclusion

Le hasard permet d'étudier une situation avec de nombreux cas sans avoir à tous les énumérer.

Le meilleur résultat actuellement connu sur $R(6,6)$ est

$$102 \leq R(6,6) \leq 165.$$