

Que peut-on espérer du hasard ?

Roger MANSUY

Congrès TimeWorld 2021

3 juillet 2021



Espérance de vie ?

En 1965, l'espérance de vie est de 74,7 ans pour les femmes et 67,5 ans pour les hommes.

Espérance de vie ?

En 1965, l'espérance de vie est de 74,7 ans pour les femmes et 67,5 ans pour les hommes.

En 2018, elle est de 85,3 ans pour les femmes et de 79,4 ans pour les hommes.

Espérance de vie ?

En 1965, l'espérance de vie est de 74,7 ans pour les femmes et 67,5 ans pour les hommes.

En 2018, elle est de 85,3 ans pour les femmes et de 79,4 ans pour les hommes.

Une notion mal comprise.

Espérance de vie ?

En 1965, l'espérance de vie est de 74,7 ans pour les femmes et 67,5 ans pour les hommes.

En 2018, elle est de 85,3 ans pour les femmes et de 79,4 ans pour les hommes.

Une notion mal comprise.

- ▶ Ce n'est pas la moyenne des âges de décès lors d'une année donnée.
- ▶ Ce n'est pas la moyenne des âges de décès d'une génération donnée.
- ▶ Le calcul de l'année n concerne les personnes nées durant cette année n .



Espérance

L'espérance de vie est une espérance au sens mathématique !

Par définition, il s'agit alors d'une valeur théorique associée à une variable aléatoire (décrivant le résultat d'une expérience).

Espérance

L'espérance de vie est une espérance au sens mathématique !

Par définition, il s'agit alors d'une valeur théorique associée à une variable aléatoire (décrivant le résultat d'une expérience).

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \quad \mathbb{E}(X) = \int_{X(\Omega)} x \mathbb{P}_X(dx).$$

Lettre de Blaise Pascal à Pierre de Fermat (1654)

*Deux joueurs jouent à un jeu de hasard en 3 parties gagnantes, chacun ayant misé la même somme d'argent m ; or il se trouve que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait obtenu 3 victoires et ainsi remporté la victoire et de ce fait la totalité des enjeux soit $2m$.
Comment, dans ces circonstances, doit-on partager les enjeux ?*

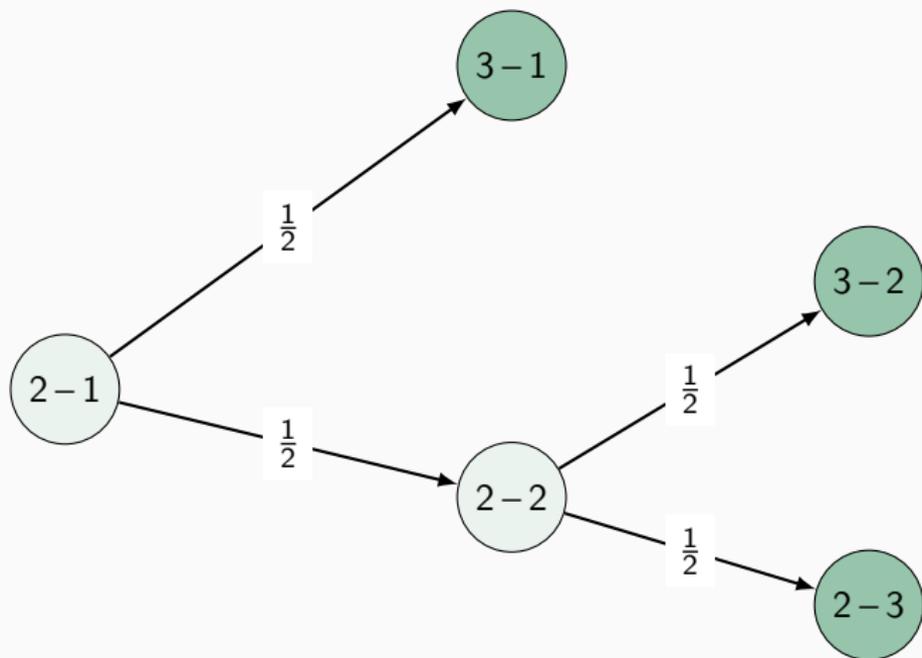
Exemple

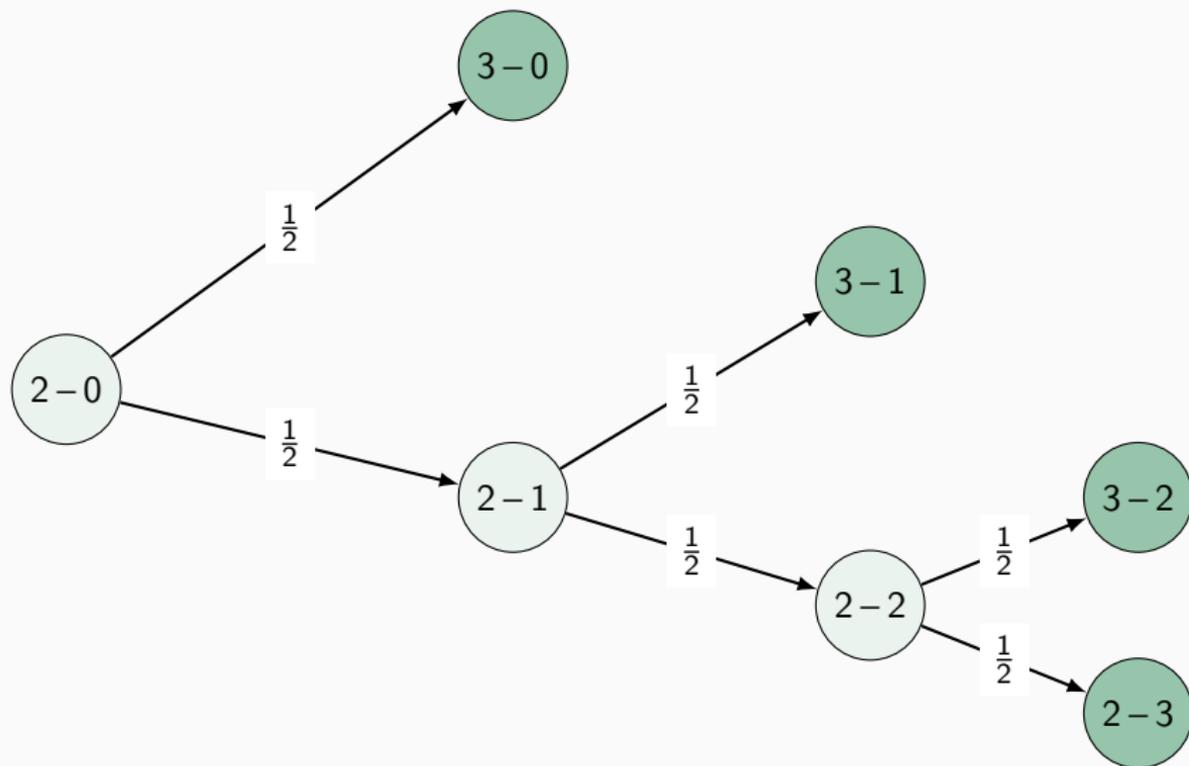
Si le score est 2-1 en faveur du joueur *A* au moment de l'interruption, il y a plusieurs évolutions possibles :

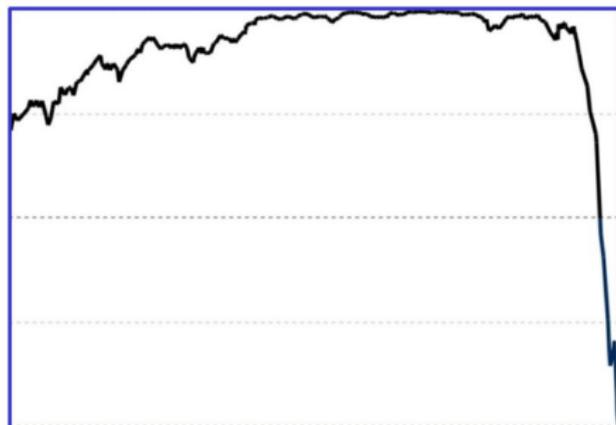
- ▶ *A* emporte la partie suivante (et donc le match sur le score 3-1)
- ▶ *B* emporte la partie suivante puis
 - ▶ *A* emporte la partie suivante (et donc le match sur le score 3-2)
 - ▶ *B* emporte la partie suivante (et donc le match sur le score 2-3)

Score	Gain de A	Probabilité
Victoire 3-1	$2m$	$\frac{1}{2}$
Victoire 3-2	$2m$	$\frac{1}{4}$
Défaite 2-3	0	$\frac{1}{4}$

En moyenne, l'espérance de gain est donc de $\frac{1}{2}(2m) + \frac{1}{4}(2m) + \frac{1}{4}(0) = \frac{3m}{2}$.
Le partage équitable est donc de $\frac{3m}{2}$ pour le joueur A et $\frac{m}{2}$ pour le joueur B .







Probabilité de victoire des Sixers face aux Hawks en fonction du temps.
Demi-finale de conférence Est, match 5, 17 juin 2021

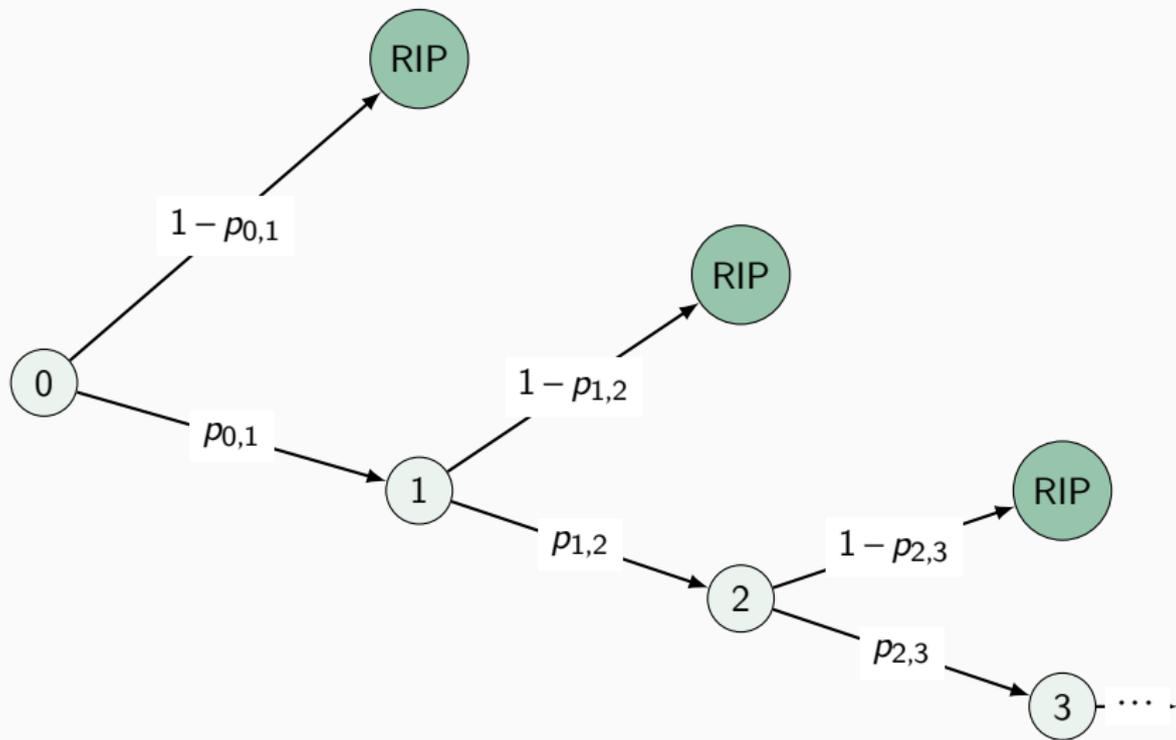
Définition

L'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs que peut prendre cette variable pondérée avec les probabilités associées.

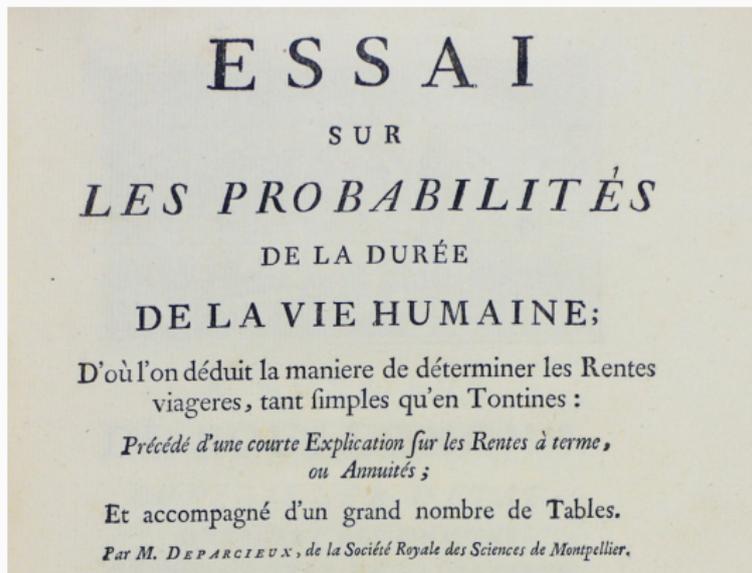
Cette définition est bien correcte lorsque la variable aléatoire prend un nombre fini de valeurs mais peut aussi être adaptée au cas d'un infinité de valeurs.

Modèle mathématique

- ▶ On considère des probabilités fixées $p_{0,1}$, $p_{1,2}$, $p_{2,3}$, ...
- ▶ On crée une expérience aléatoire où
 - ▶ un individu survit à sa première année avec probabilité $p_{0,1}$
 - ▶ s'il a atteint 1 an, il survit à la deuxième année avec probabilité $p_{1,2}$
 - ▶ s'il a atteint 2 ans, il survit à la troisième année avec probabilité $p_{2,3}$
 - ▶ ...
- ▶ On calcule l'espérance mathématique de la variable donnant l'âge du décès.



Il reste à bien choisir les probabilités $p_{k,k+1}$!



Généralisations

Espérance de vie à divers âges

en années

Année	Espérance de vie des femmes						Espérance de vie des hommes					
	à 0 an	à 1 an	à 20 ans	à 40 ans	à 60 ans	à 65 ans	à 0 an	à 1 an	à 20 ans	à 40 ans	à 60 ans	à 65 ans
2020 (p) (r)	85,1	84,4	65,6	45,9	27,3	23,0	79,1	78,4	59,6	40,4	22,7	18,9
2019 (p)	85,6	84,9	66,0	46,4	27,8	23,4	79,7	79,0	60,3	41,1	23,4	19,6
2018 (p)	85,4	84,7	65,9	46,3	27,7	23,3	79,5	78,8	60,1	40,9	23,3	19,5
2017	85,3	84,6	65,8	46,1	27,6	23,2	79,4	78,7	60,0	40,8	23,2	19,4
2016	85,3	84,6	65,7	46,1	27,6	23,2	79,3	78,6	59,8	40,6	23,1	19,3
2015	85,1	84,4	65,6	45,9	27,4	23,0	79,0	78,3	59,6	40,4	22,9	19,1

<https://www.insee.fr/fr/statistiques/2416631>

Une autre approche

5 year mortality predictors in 498 103 UK Biobank participants: a prospective population-based study



Andrea Ganna, Erik Ingelsson

Summary

Background To our knowledge, a systematic comparison of predictors of mortality in middle-aged to elderly individuals has not yet been done. We investigated predictors of mortality in UK Biobank participants during a 5 year period. We aimed to investigate the associations between most of the available measurements and 5 year all-cause and cause-specific mortality, and to develop and validate a prediction score for 5 year mortality using only self-reported information.

Lancet 2015; 386: 533-40

Published Online

June 4, 2015

[http://dx.doi.org/10.1016/S0140-6736\(15\)60175-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0140-6736(15)60175-1)

Extraits du questionnaire

1. Quel est votre âge ? votre sexe ?
2. Vous a-t-on déjà diagnostiqué un diabète ?
3. Fumez-vous ?
4. Comment qualifieriez-vous votre rythme de marche ?
5. De combien de voitures dispose votre foyer ?
6. Avez-vous été confronté à des difficultés financières lors des deux dernières années ?
7. Avez-vous perdu un proche récemment ?

Une légende mathématique



Abraham de Moivre (1667-1754)