Le nombre chromatique du plan

Roger Mansuy

χ-Science-Camp@Home $\leftrightarrow$ Science Ouverte

9 juillet 2020

Problème de Hadwiger-Nelson

Colorier le plan de sorte à ce que deux points quelconques à distance 1 ne soient jamais de la même couleur.

Le nombre minimal de couleurs pour pouvoir réussir ce coloriage est appelé nombre chromatique du plan et noté avec la lettre grecque χ.

Objectif : calculer χ.

Problème de Hadwiger-Nelson

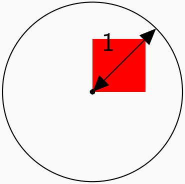
Colorier le plan de sorte à ce que deux points quelconques à distance 1 ne soient jamais de la même couleur.

Le nombre minimal de couleurs pour pouvoir réussir ce coloriage est appelé nombre chromatique du plan et noté avec la lettre grecque χ.

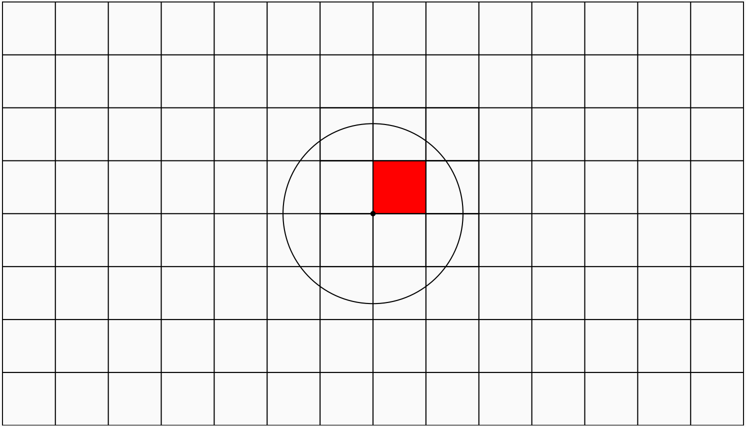
Objectif : calculer χ.

Spoiler : on ne connaît pas vraiment la réponse...

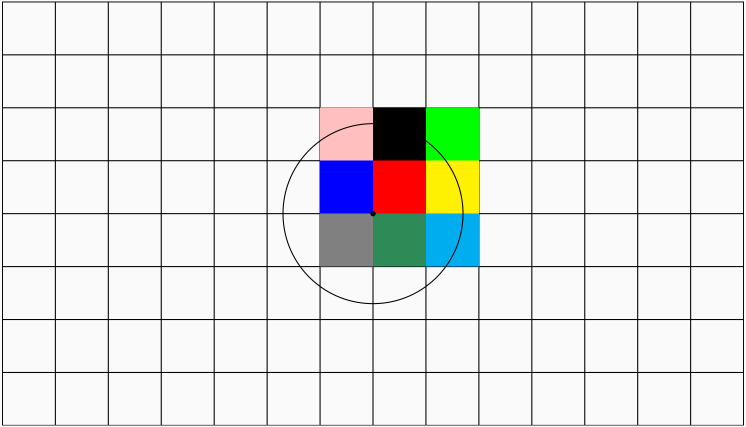
$\chi \leq 9$



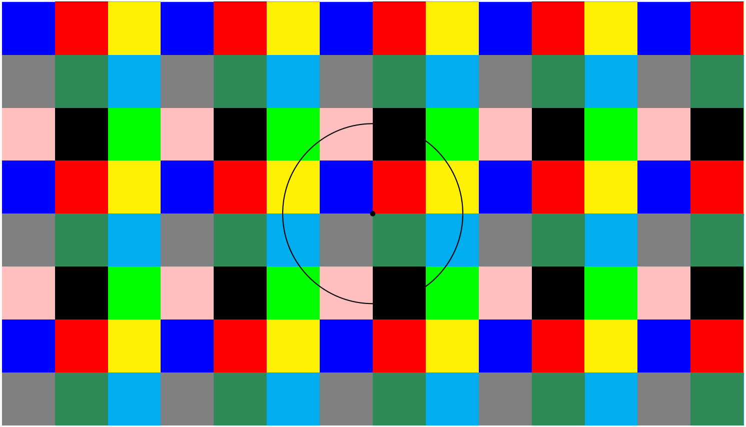
$\chi \leq 9$



$\chi \leq 9$



$\chi \leq 9$

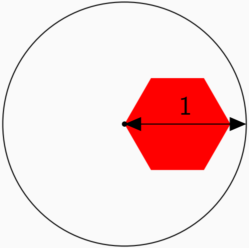


Ce coloriage assure en particulier que χ est bien défini.

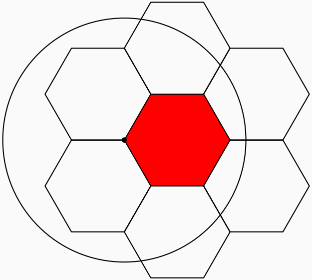
Proposition

$\chi \leq 9$, c'est-à-dire on peut colorier le plan avec 9 couleurs.

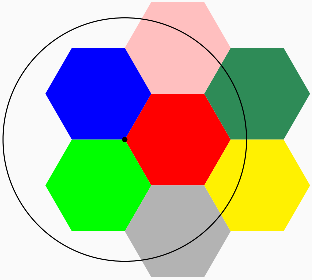
$\chi \leq 7$



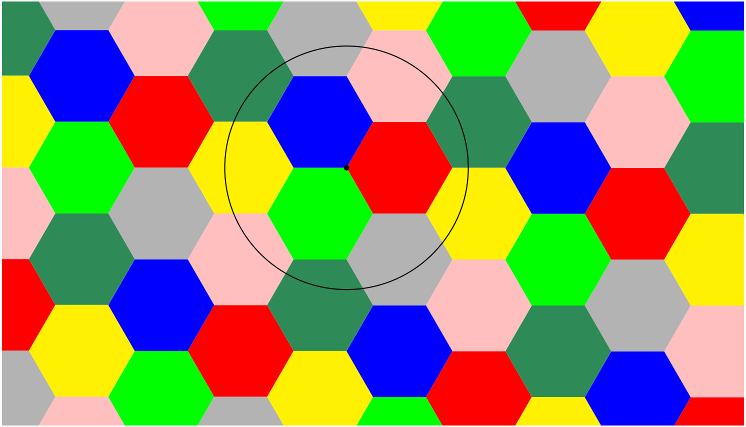
$\chi \leq 7$



$\chi \leq 7$



$\chi \leq 7$



Proposition

$\chi \leq 7$, c'est-à-dire on peut colorier le plan avec 7 couleurs.

Proposition

$\chi \leq 7$, c'est-à-dire on peut colorier le plan avec 7 couleurs.

Spoiler : on ne sait pas si $\chi = 7$ *ou* $\chi \leq 6$.

Pour obtenir une majoration $\chi \leq N$, il suffit d'exhiber un coloriage « admissible » du plan avec N couleurs.

Jackson Pollock, Wild beast, 1943

Jackson Pollock, Wild beast, 1943
Drip painting

$\chi > 1$

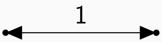
Proposition

$\chi > 1$, c'est-à-dire une seule couleur ne suffit pas.

$\chi > 1$

Proposition

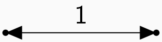
$\chi > 1$, c'est-à-dire une seule couleur ne suffit pas.

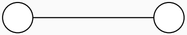


$\chi > 1$

Proposition

$\chi > 1$, c'est-à-dire une seule couleur ne suffit pas.

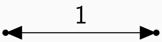


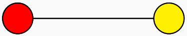


$\chi > 1$

Proposition

$\chi > 1$, c'est-à-dire une seule couleur ne suffit pas.





$\chi > 2$

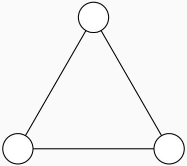
Proposition

$\chi > 2$, c'est-à-dire deux couleurs ne suffisent pas.

$\chi > 2$

Proposition

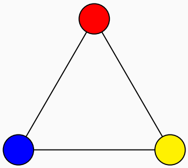
$\chi > 2$, c'est-à-dire deux couleurs ne suffisent pas.



$\chi > 2$

Proposition

$\chi > 2$, c'est-à-dire deux couleurs ne suffisent pas.



$\chi > 3$

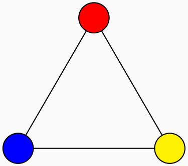
Proposition

$\chi > 3$, c'est-à-dire trois couleurs ne suffisent pas.

$\chi > 3$

Proposition

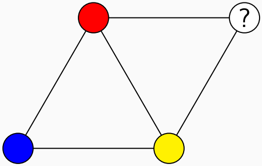
$\chi > 3$, c'est-à-dire trois couleurs ne suffisent pas.



$\chi > 3$

Proposition

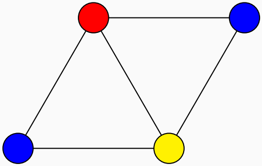
$\chi > 3$, c'est-à-dire trois couleurs ne suffisent pas.

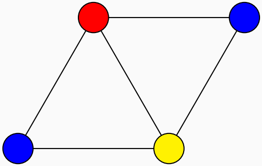


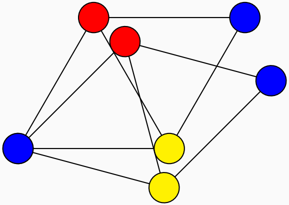
$\chi > 3$

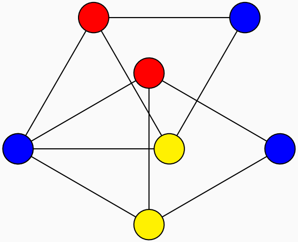
Proposition

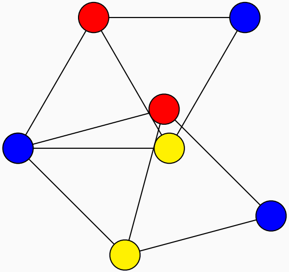
$\chi > 3$, c'est-à-dire trois couleurs ne suffisent pas.



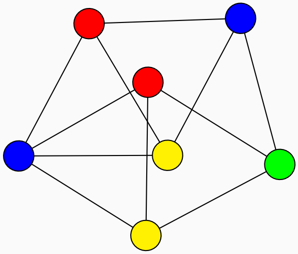








La configuration obtenue lorsque les deux points de droite sont à distance 1 est appelée graphe de Moser ou broche de Moser.



Pour obtenir une minoration $\chi > N$, il suffit d'exhiber un ensemble de points du plan que l'on ne peut pas colorier avec N couleurs.

Pour obtenir une minoration $\chi > N$, il suffit d'exhiber un ensemble de points du plan que l'on ne peut pas colorier avec N couleurs.

Proposition

$\chi \in \{4, 5, 6, 7\}$.

Pour obtenir une minoration $\chi > N$, il suffit d'exhiber un ensemble de points du plan que l'on ne peut pas colorier avec N couleurs.

Proposition

$\chi \in \{4, 5, 6, 7\}$.

Spoiler : jusqu'en 2018, on n'en savait pas plus mais on cherchait des configurations de points qui n'étaient pas coloriables avec seulement 4 *couleurs.*

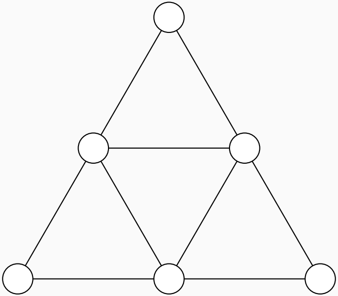
Exercices

Essayons quelques configurations pour appréhender la difficulté du problème.

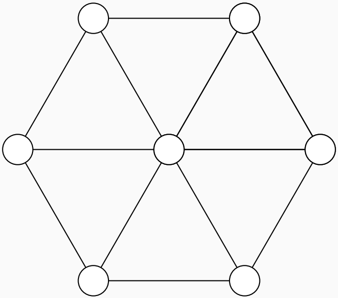
Exercice

Parmi les configurations suivantes quelles sont celles qui peuvent être coloriées avec trois couleurs et celles pour lesquelles il en faut au moins quatre ?

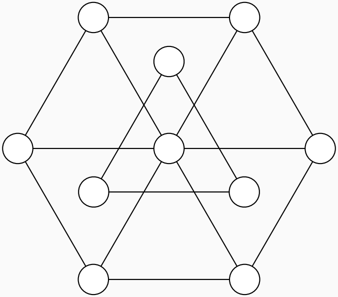
Faisons un essai en repartant du triangle.



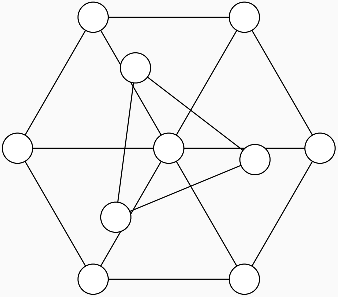
Faisons un autre essai en repartant du triangle pour obtenir une configuration plus compliquée(le graphe W_7).



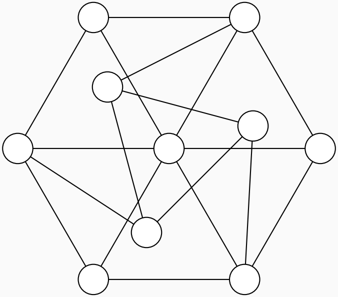
Rajoutons encore un triangle :



Rajoutons encore un triangle :

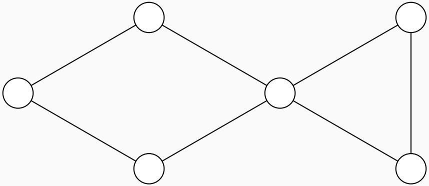


Rajoutons encore un triangle :

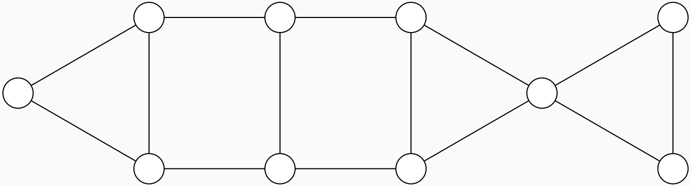


La figure obtenue s'appelle graphe de Gollomb.

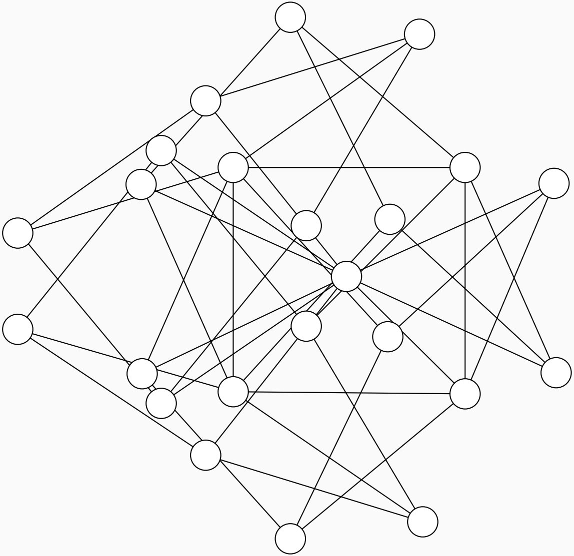
Voici un petit poisson :



Un autre poisson :



Un dernier poisson (graphe poisson de Hochberg et O'Donnell) :



$\chi > 4$

Depuis 2018, on dispose du résultat suivant :

Proposition

$\chi > 4$

Aubrey de Grey (1963-)

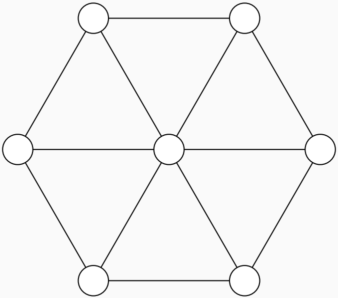
- a suivi un cursus en informatique
- est un biogérontologue autodidacte, fondateur du projet *Strategies for Engineered Negligible Senescence*
- cherche « à régénérer les tissus cellulaires pour étendre l'espérance de vie au-delà de 1000 ans »
- est champion du jeu Othello

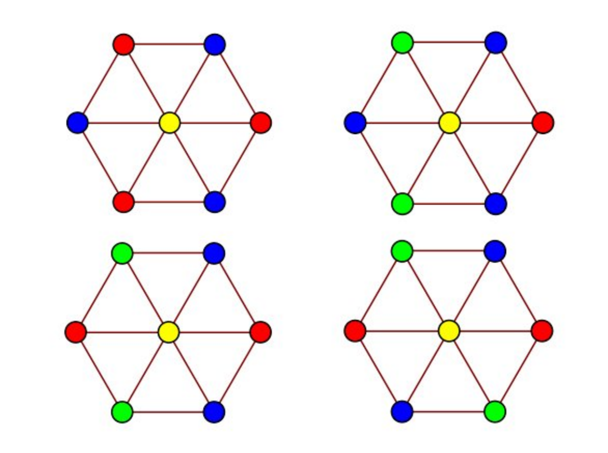
Il prépublie en avril 2018 un article intitulé :

The chromatic number of the plane is at least 5

dans lequel il propose une configuration à 1581 points (ou graphe distance-unité à 1581 sommets) dont le coloriage requiert cinq couleurs !

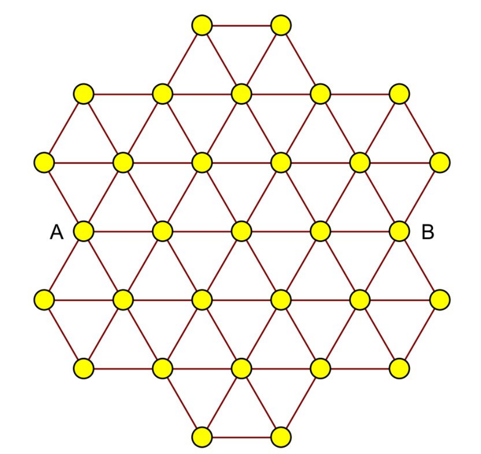
Il commence par remarquer qu'il y a essentiellement quatre coloriages avec 4 couleurs de W_7.



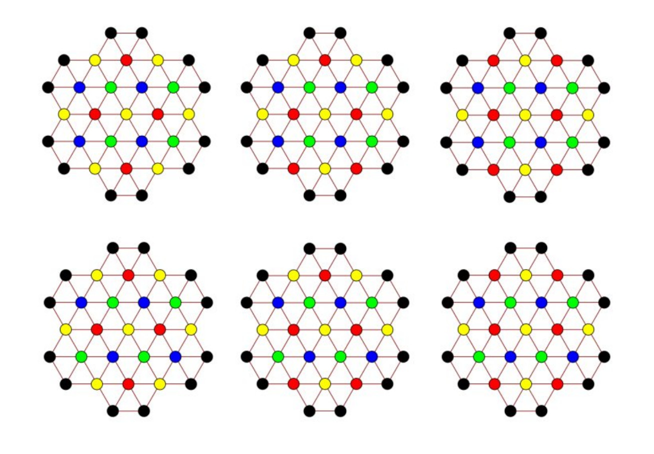


Deux d'entre eux (ceux du haut) admettent trois sommets de la même couleur.

Il couple treize roues W_7 pour former un graphe appelé J.

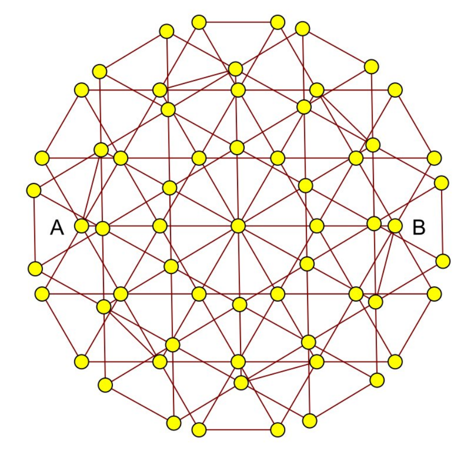


J admet essentiellement six coloriages tels que les sept copies de W_7 « intérieures » ne contiennent pas trois sommets de la même couleur.



Il y a (de gauche à droite) 6, 4 (consécutifs) ou 2 (opposés) sommets à distance 2 du centre de la même couleur que le centre.

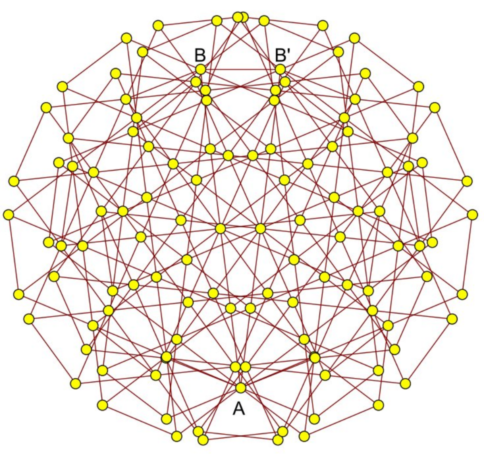
Le graphe K est composé de deux copies de J tournées l'une par rapport à l'autre d'un angle de $2 \arcsin \frac{1}{4}$ autour du centre.



L'objectif est donc de « coller » des copies de graphes en reliant des points de sorte à les empêcher d'avoir la même couleur (comme pour la construction du graphe de Moser).

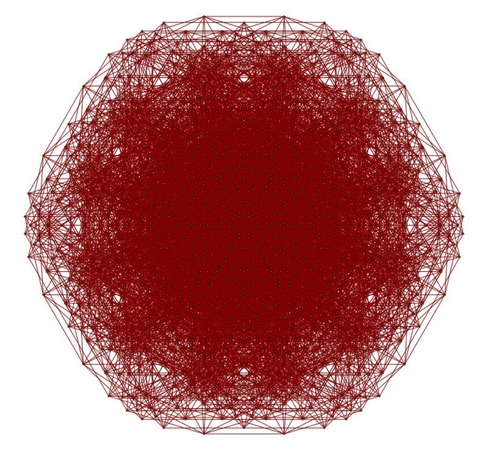
Par exemple, on force ici les copies du graphe J à avoir exactement 2 sommets à distance 2 du centre de la même couleur que le centre puisque, dans le cas contraire, une nouvelle arête relierait deux points de la même couleur.

Le graphe L est composé de deux copies de K tournées autour de A et d'angle $2 \arcsin \frac{1}{8}$.



Le point B et son image B' sont désormais à distance 1 : ils sont de couleurs différentes.

Le graphe M est trouvé avec 1345 sommets et contient un très grand nombre de graphes de Moser.



C'est l'union de sept copies translatées d'un graphe W dont on connaît explicitement les coordonnées des 301 sommets.

Dans L, il y a 52 « copies » de W_7.

Il y a un graphe W_7 au milieu de M.

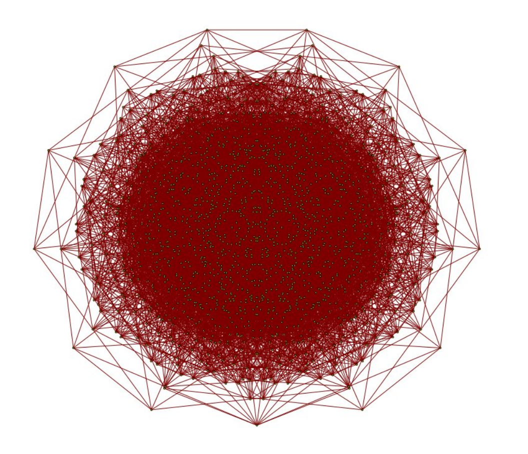
On obtient le graphe N en copiant 52 fois M de sorte à ce que chaque copie de M soit centrée sur l'une des occurrences de W_7 dans L.

Proposition

Le graphe N ainsi obtenu n'est pas coloriable avec 4 couleurs.

Le graphe N admet 20425 sommets. A. de Grey le simplifie en enlevant les sommets qui ne contraignent pas la coloriabilité pour tomber sur un graphe G à seulement 1581 sommets.

Le graphe N admet 20425 sommets. A. de Grey le simplifie en enlevant les sommets qui ne contraignent pas la coloriabilité pour tomber sur un graphe G à seulement 1581 sommets.



Le projet Polymath est une plate-forme pour des collaborations massives de mathématiciens.

Trois des projets du groupe ont donné lieu à des publications d'articles de recherche sous le pseudonyme « D.H.J. Polymath ».

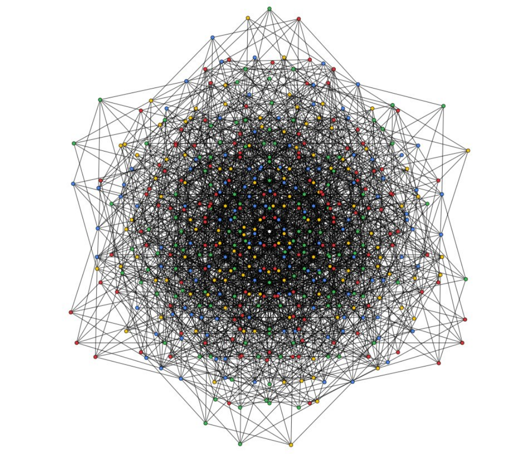
Le projet Polymath est une plate-forme pour des collaborations massives de mathématiciens.

Trois des projets du groupe ont donné lieu à des publications d'articles de recherche sous le pseudonyme « D.H.J. Polymath ».

Voici le seizième projet sur proposition du 10 avril 2018 (après l'article de de Grey) :

finding simpler unit distance graphs of chromatic number 5

Parmi les contributeurs à ce projet, Marijn Heule a fait de nombreuses avancées et a simplifié, grâce à un traitement algorithmique de formules logiques, la configuration de Aubrey de Grey en une configuration à « seulement » 509 points qui ne peut être coloriée avec moins de 5 couleurs !



Simultanément à A. de Grey, Geoffrey Exoo et Dan Ismailescu ont montré un résultat analogue en supposant deux conditions sur les distances interdites pour deux points de même couleur (1 et $d = \frac{1}{2}\sqrt{3^{1/4}2^{3/2} + 3^{1/2}2 + 2}$) en utilisant le même argument à partir d'un graphe simple où deux sommets sont forcés à être de même couleur :

Lemma 4.1. *Consider the $\{1, d\}$- graph whose vertices have the following coordinates:*

$$\mathbf{1}\,(3^{1/4}\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1, 3^{3/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)/4,\ \ \mathbf{2}\,(-3^{1/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1, 3^{3/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)/4,$$

$$\mathbf{3}\,(3^{1/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1, 3^{3/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)/4,\ \ \mathbf{4}\,(-3^{1/4}\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1, 3^{3/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)/4,$$

$$\mathbf{5}\,(3^{1/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1, 3^{3/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3)/4,\ \ \mathbf{6}\,(-3^{1/4}\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1, 3^{3/4}\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3)/4,$$

$$\mathbf{7}\,(3^{3/4}\sqrt{2} - 3^{1/4}\sqrt{2}, 3^{3/4}\sqrt{2} - 3^{1/4}\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2)/4,$$

$$\mathbf{8}\,(-3^{3/4}\sqrt{2} + 3^{1/4}\sqrt{2}, 3^{3/4}\sqrt{2} - 3^{1/4}\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2)/4,$$

$$\mathbf{9}\,(1, 0),\ \mathbf{10}\,(-1, 0),\ \mathbf{11}\,(1, \sqrt{3})/2,\ \mathbf{12}\,(-1, \sqrt{3})/2,\ \mathbf{13}\,(0, 0).$$

Then in every 4-coloring of this graph, vertices 1 and 2 must be assigned the same color.