L'autre problème de Kakeya

Roger Mansuy

Journée Maths-Monde et **Séminaire IREM Paris**

11 mars 2020

Introduction

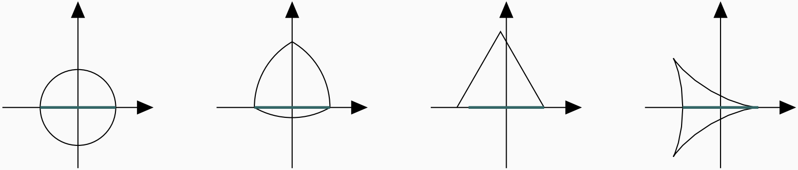
Sōichi Kakeya (1886-1947)

Question

Quelle est la plus petite surface balayée lors d'un retournement d'une aiguille de longueur 1 ?

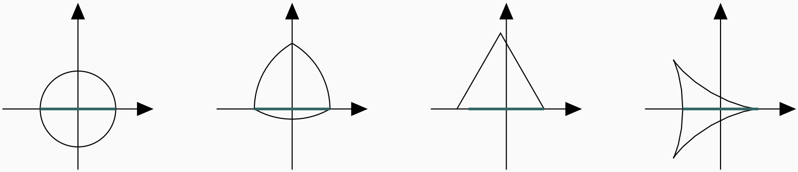
Question

Quelle est la plus petite surface balayée lors d'un retournement d'une aiguille de longueur 1 ?



Question

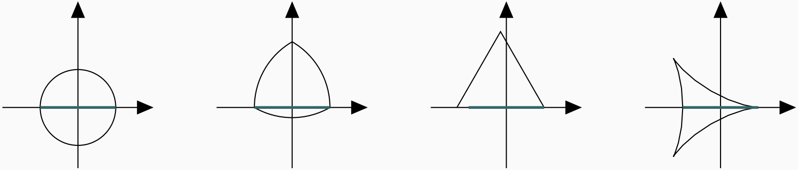
Quelle est la plus petite surface balayée lors d'un retournement d'une aiguille de longueur 1 ?



- aire du disque : $\frac{\pi}{4}$
- aire du triangle de Reuleaux : $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})$
- aire du triangle équilatéral : $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- aire de la deltoïde : $\frac{\pi}{8}$

Question

Quelle est la plus petite surface balayée lors d'un retournement d'une aiguille de longueur 1 ?



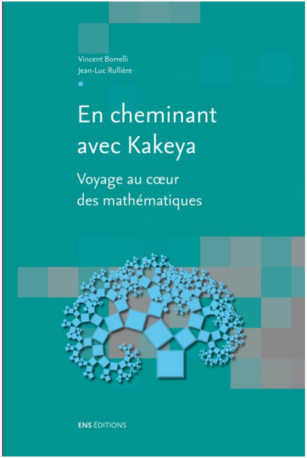
- aire du disque : $\frac{\pi}{4} \simeq 0.785$
- aire du triangle de Reuleaux : $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3}) \simeq 0.705$
- aire du triangle équilatéral : $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.577$
- aire de la deltoïde : $\frac{\pi}{8} \simeq 0.393$

Abram Besicovitch (1891-1970) a établi le résultat suivant.

Proposition

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une surface qui convient d'aire inférieure à ε.

En cheminant avec Kakeya, Vincent Borrelli et Jean-Luc Rullière, ENS Éditions, 2014.



Ce livre, qui a reçu le *Prix Tangente 2015*, est en libre accès au format numérique sur la page des auteurs.

Le problème des sous-sommes

be observed, for on the surface were floating many fragmental slags of the cooled lava.

Two days after this observation, the observer again ascended the mountain, but it was found that the eruption had ceased, and there could be seen no lava-flow. Descending into the inside of the old crater, the temperature of a molten lava in glutinous state, which could be found in the fissure in the crust of the newly formed lava-field, was measured at a distance of about five metres, and the following values were obtained:

1010° C.	1017° C.
1017	1008
1043	1008
1048	995
1017	1000

At least the actual temperature of the flowing lava must have been higher than these temperatures. The results show that, unless great errors are presumed, the optical pyrometer cannot be reliably used in such a case.

On the Set of Partial Sums of an Infinite Series.

By

S. Kakeya.

[Read April 4, 1914.]

From an infinite series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

we can construct an infinite number of series of the from

$$\sum_{r=1}^{m} a_{n_r},$$

m being either finite or infinite, which consist of some terms of the

given series. All these new series are called the partial sums of the given one.

It seems to be somewhat interesting to discuss about the nature of the set of these partial sums. One of the properties of the set, which I have been able to prove, is as follows.

The set of partial sums of any absolutely converging infinite series, real or complex, is perfect.

Specially, if all the terms of the given series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

are real, the set of partial sums lies in the interval (u, v), where u and v are the two partial sums consisting of all the negative terms and all the positive terms of the given series, respectively. In order that the set of partial sums in this case should consist of all the values in the interval (u, v), it is necessary and sufficient that

$$|a_n| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

for all values of n.

If this relation does not hold for all values of n, then the set is nowhere dense. And that this relation fails only for an infinite number of values of n, seems to be the necessary and sufficient condition that the set should be nowhere dense; but I have no proof for it.

On the Set of Partial Sums of an Infinite Series, S. Kakeya, 1914

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite nulle. Un réel x est représenté par cette suite s'il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ telle que

$$x = \sum_{n \in A} u_n.$$

On note $S(u)$ l'ensemble des réels représentés par la suite u.

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite nulle. Un réel x est représenté par cette suite s'il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ telle que

$$x = \sum_{\substack{n=0 \\ n \in A}}^{+\infty} u_n.$$

On note $S(u)$ l'ensemble des réels représentés par la suite u.

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite nulle. Un réel x est représenté par cette suite s'il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ telle que

$$x = \sum_{\substack{n=0 \\ n \in A}}^{+\infty} u_n.$$

On note $S(u)$ l'ensemble des réels représentés par la suite u.

Question

À quoi ressemble l'ensemble $S(u)$ pour une suite u donnée ?

Soit une suite réelle $(u_n)_n$.

Soit une suite réelle $(u_n)_n$.

- $0 \in S(u)$.

Soit une suite réelle $(u_n)_n$.

- $0 \in S(u)$.
- $$S(u) \subset \left[-\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ \right]$$
  avec des conventions naturelles d'écriture si les sommes sont infinies.

Soit une suite réelle $(u_n)_n$.

- $0 \in S(u)$.
- $$S(u) \subset \left[-\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ \right]$$
  avec des conventions naturelles d'écriture si les sommes sont infinies.
- Si la suite u est positive et $S(u)$ admet un plus grand élément M, alors
  $$x \in S(u) \iff M - x \in S(u).$$

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. La série de terme général u_n

▷ est convergente si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ converge,

▷ est absolument convergente si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)_n$ converge,

▷ est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

Dans sa note, Sōichi Kakeya énonce quelques résultats :

Dans sa note, Sōichi Kakeya énonce quelques résultats :

- Si la série de terme général u_n est absolument convergente, l'ensemble $S(u)$ est fermé.

Dans sa note, Sōichi Kakeya énonce quelques résultats :

- Si la série de terme général u_n est absolument convergente, l'ensemble $S(u)$ est fermé.
- Une condition suffisante pour que l'ensemble $S(u)$ soit un intervalle est, pour tout n,

$$|a_n| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \cdots\cdots\cdots$$

Dans sa note, Sōichi Kakeya énonce quelques résultats :

- Si la série de terme général u_n est absolument convergente, l'ensemble $S(u)$ est fermé.
- Une condition suffisante pour que l'ensemble $S(u)$ soit un intervalle est, pour tout n,

$$|a_n| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

- Une condition suffisante pour que l'ensemble $S(u)$ soit d'intérieur vide est, pour tout n, l'inégalité contraire.

Dans sa note, Sōichi Kakeya énonce quelques résultats :

- Si la série de terme général u_n est absolument convergente, l'ensemble $S(u)$ est fermé.
- Une condition suffisante pour que l'ensemble $S(u)$ soit un intervalle est, pour tout n,

$$|a_n| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \cdots\cdots\cdots$$

- Une condition suffisante pour que l'ensemble $S(u)$ soit d'intérieur vide est, pour tout n, l'inégalité contraire.
- Une conjecture pour les autres cas... infirmée en 1980.

but I have no proof for it.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite nulle et non stationnaire.
Alors, les éléments de $S(u)$ ne sont pas isolés.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite nulle et non stationnaire.
Alors, les éléments de $S(u)$ ne sont pas isolés.

Soit $x \in S(u)$ et $\varepsilon > 0$.

On dispose d'un entier N tel que $0 < |u_N| < \varepsilon$.

Alors, l'un des réels $x + u_N$ ou $x - u_N$ appartient à $S(u) \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que la série de terme général u_n converge absolument.
Alors, $S(u)$ est une partie fermée.

Montrons ce résultat pour une suite $(u_n)_n$ positive.

Soit $(x_l)_l$ une suite à valeurs dans $S(u)$ qui converge vers x.

Notons, pour tout l, $A_l \subset \mathbb{N}$ une partie associée à la représentation de x_l.

Considérons $A = \limsup A_l$, l'ensemble des indices qui apparaissent dans une infinité de parties A_l. Montrons que

$$x = \sum_{n \in A} u_n.$$

▷ Supposons A majorée. Considérons m un entier au-delà de A. Les entiers hors de A et inférieurs à m appartiennent à un nombre fini de A_k.

Pour tout j suffisamment grand,

$$A_j \cap [\![0, m]\!] = A.$$

▷ Supposons A majorée. Considérons m un entier au-delà de A. Les entiers hors de A et inférieurs à m appartiennent à un nombre fini de A_k.

Pour tout j suffisamment grand,

$$A_j \cap [\![0, m]\!] = A.$$

Par conséquent,

$$0 \leq x_j - \sum_{k \in A} u_k = \sum_{k \in A_j} u_k - \sum_{k \in A} u_k \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k.$$

▷ Supposons A majorée. Considérons m un entier au-delà de A. Les entiers hors de A et inférieurs à m appartiennent à un nombre fini de A_k.

Pour tout j suffisamment grand,

$$A_j \cap [\![0, m]\!] = A.$$

Par conséquent,

$$0 \leq x_j - \sum_{k \in A} u_k = \sum_{k \in A_j} u_k - \sum_{k \in A} u_k \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k.$$

Le terme de droite est le reste partiel d'une série convergente donc de limite nulle quand $m \to +\infty$.
En conclusion,

$$x = \sum_{k \in A} u_k.$$

▷ Supposons A non majorée ; notons $(n_k)_k$ la suite croissante des valeurs de A.

Pour tout k, considérons A_{j_k} une partie ayant exactement les mêmes k premiers éléments que A, c'est-à-dire

$$A_{j_k} \cap [\![0, n_k]\!] = \{n_0, \dots, n_k\}.$$

▷ Supposons A non majorée ; notons $(n_k)_k$ la suite croissante des valeurs de A.

Pour tout k, considérons A_{j_k} une partie ayant exactement les mêmes k premiers éléments que A, c'est-à-dire

$$A_{j_k} \cap [\![0, n_k]\!] = \{n_0, \dots, n_k\}.$$

Alors,

$$0 \leq x_{j_k} - \sum_{l=0}^{k} u_{n_l} \leq \sum_{l=n_k+1}^{\infty} u_l.$$

En faisant tendre $k \to +\infty$,

$$x = \sum_{k \in A} u_k.$$

Cas intervalle

Cas intervalle

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^{-(n+1)}$$

l'ensemble des réels représentés est

Cas intervalle

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^{-(n+1)}$$

l'ensemble des réels représentés est

$$S(u) = [0, 1].$$

Il s'agit de l'écriture dyadique des éléments de l'intervalle $[0, 1]$.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite nulle telle que, pour tout n,

$$|u_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|.$$

Alors, $S(u)$ est un intervalle.

Montrons cette proposition dans le cas où la suite $(u_n)_n$ est positive.

Montrons cette proposition dans le cas où la suite $(u_n)_n$ est positive.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite positive de limite nulle telle que, pour tout n,

$$u_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Alors, $S(u)$ est l'intervalle $\left[0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right]$ (ou $[0, +\infty[$ si la série diverge).

Mettons en place une **stratégie gloutonne** pour obtenir une représentation d'un réel

$$x \in \left]0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right[.$$

Mettons en place une **stratégie gloutonne** pour obtenir une représentation d'un réel

$$x \in \left]0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right[.$$

- prenons n_0, le plus petit entier m tel que $u_m \leq x$

Mettons en place une **stratégie gloutonne** pour obtenir une représentation d'un réel

$$x \in \left]0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right[.$$

- prenons n_0, le plus petit entier m tel que $u_m \leq x$
- prenons n_1, le plus petit entier $m > n_0$ tel que $u_{n_0} + u_m \leq x$

Mettons en place une **stratégie gloutonne** pour obtenir une représentation d'un réel

$$x \in \left]0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right[.$$

- prenons n_0, le plus petit entier m tel que $u_m \leq x$
- prenons n_1, le plus petit entier $m > n_0$ tel que $u_{n_0} + u_m \leq x$
- ...

Mettons en place une **stratégie gloutonne** pour obtenir une représentation d'un réel

$$x \in \left]0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right[.$$

- prenons n_0, le plus petit entier m tel que $u_m \leq x$
- prenons n_1, le plus petit entier $m > n_0$ tel que $u_{n_0} + u_m \leq x$
- ...
- prenons n_k, le plus petit entier $m > n_{k-1}$ tel que

$$\sum_{j=0}^{k-1} u_{n_j} + u_m \leq x.$$

Mettons en place une **stratégie gloutonne** pour obtenir une représentation d'un réel

$$x \in \left]0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right[.$$

- prenons n_0, le plus petit entier m tel que $u_m \leq x$
- prenons n_1, le plus petit entier $m > n_0$ tel que $u_{n_0} + u_m \leq x$
- ...
- prenons n_k, le plus petit entier $m > n_{k-1}$ tel que

$$\sum_{j=0}^{k-1} u_{n_j} + u_m \leq x.$$

- ...

▷ Si, pour un indice k, on a l'égalité

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_j} = x,$$

alors, la construction s'arrête et on dispose d'une représentation de x.

▷ Si, pour un indice k, on a l'égalité

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_j} = x,$$

alors, la construction s'arrête et on dispose d'une représentation de x.

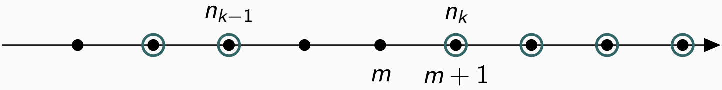
▷ Sinon, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_j} < x.$$

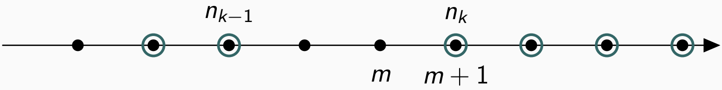
La famille ainsi construite est infinie et, par passage à la limite,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} u_{n_j} \leq x.$$

• Si la suite $(n_k)_n$ comporte tous les entiers sauf un nombre fini, on note m le plus grand entier qui n'y apparaît pas et k tel que $n_k = m + 1$.



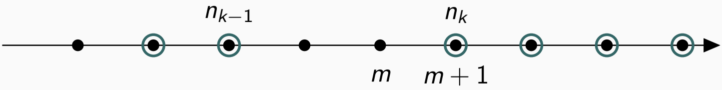
• Si la suite $(n_k)_n$ comporte tous les entiers sauf un nombre fini, on note m le plus grand entier qui n'y apparaît pas et k tel que $n_k = m + 1$.



Alors,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} u_{n_j} \leq x < \sum_{j=0}^{k-1} u_{n_j} + u_m,$$

• Si la suite $(n_k)_n$ comporte tous les entiers sauf un nombre fini, on note m le plus grand entier qui n'y apparaît pas et k tel que $n_k = m + 1$.



Alors,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} u_{n_j} \leq x < \sum_{j=0}^{k-1} u_{n_j} + u_m,$$

donc

$$\sum_{l=m+1}^{+\infty} u_l = \sum_{j=k}^{+\infty} u_{n_j} < u_m$$

ce qui contredit l'inégalité en hypothèse au rang m.

• Sinon, notons $(m_k)_k$ la suite croissante des entiers qui n'apparaissent pas dans la suite $(n_k)_k$.
Alors, pour tout k,

$$\sum_{\substack{j=0\\ n_j<m_k}}^{+\infty} u_{n_j} \leq x < \sum_{\substack{j=0\\ n_j<m_k}}^{+\infty} u_{n_j} + u_{m_k}.$$

• Sinon, notons $(m_k)_k$ la suite croissante des entiers qui n'apparaissent pas dans la suite $(n_k)_k$.
Alors, pour tout k,

$$\sum_{\substack{j=0\\ n_j<m_k}}^{+\infty} u_{n_j} \leq x < \sum_{\substack{j=0\\ n_j<m_k}}^{+\infty} u_{n_j} + u_{m_k}.$$

Or $m_k \to +\infty$ et $u_{m_k} \to 0$ donc le lemme d'encadrement entraîne

$$x = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{n_j}.$$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite nulle, décroissante en valeur absolue telle que $S(u)$ est un intervalle.
Alors, la condition de la proposition précédente est nécessaire, c'est-à-dire, pour tout n,

$$|u_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|.$$

Effectuons la preuve dans le cas d'une suite positive.

Par contraposition, supposons qu'il existe un indice n tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k < u_n$.

▷ Les réels $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et u_n sont représentés.

Par contraposition, supposons qu'il existe un indice n tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k < u_n$.

- ▷ Les réels $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et u_n sont représentés.
- ▷ Soit x strictement entre ces valeurs.

Par contraposition, supposons qu'il existe un indice n tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k < u_n$.

▷ Les réels $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et u_n sont représentés.

▷ Soit x strictement entre ces valeurs.

Dans une représentation de x par cette suite, il ne peut y avoir de terme d'indice inférieur ou égal à n puisque ces termes sont supérieurs à u_n donc strictement supérieurs à x (et la suite est positive) :

$$\forall m \leq n, \qquad u_m \geq u_n > x.$$

Ainsi, il ne peut y avoir que des termes d'indices supérieurs à $n+1$. Or la somme maximale de tous ces termes est

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et elle est strictement inférieure à x.

Ainsi, il ne peut y avoir que des termes d'indices supérieurs à $n+1$. Or la somme maximale de tous ces termes est

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et elle est strictement inférieure à x.

En conclusion, x n'est pas représenté par cette suite.

Ainsi, il ne peut y avoir que des termes d'indices supérieurs à $n+1$. Or la somme maximale de tous ces termes est

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et elle est strictement inférieure à x.

En conclusion, x n'est pas représenté par cette suite.

Ainsi,

$$S(u) \cap \left] u_n, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right[= \varnothing.$$

Par conséquent, $S(u)$ n'est pas un intervalle.

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{n+1}$$

l'ensemble des réels représentés est $\mathbb{R}_+$.

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{n+1}$$

l'ensemble des réels représentés est $\mathbb{R}_+$.

La suite est de limite nulle et l'inégalité est immédiatement vérifiée puisque, pour tout entier n,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| = +\infty.$$

Notons $(p_n)_n$ la suite croissante des nombres premiers.

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{p_n}$$

l'ensemble des réels représentés est $\mathbb{R}_+$.

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

l'ensemble des réels représentés est $\mathbb{R}$.

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

l'ensemble des réels représentés est $\mathbb{R}$.

Avec la proposition, on obtient

$$S(u^+) = \mathbb{R}_+, \qquad S(u^-) = \mathbb{R}_+ \quad (S(-u^-) = \mathbb{R}_-)$$

et, par suite,

$$S(u) = \mathbb{R}.$$

Avec la même méthode, on obtient un « analogue » du théorème de réarrangement de Dirichlet.

Proposition

Soit une suite $(u_n)_n$ qui définit une série semi-convergente. Alors, tout réel est représenté par cette suite.

L'exemple suivant, construit sur la suite de Fibonacci $(F_n)_n$, est cité par Paulo Ribenboim dans son livre *My Numbers, My Friends*.

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{F_n}$$

l'ensemble des réels représentés est un segment $[0, S]$.

L'exemple suivant, construit sur la suite de Fibonacci $(F_n)_n$, est cité par Paulo Ribenboim dans son livre *My Numbers, My Friends*.

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{F_n}$$

l'ensemble des réels représentés est un segment $[0, S]$.

Pour tout n, $F_{n+1} \leq 2F_n$ donc $u_{n+1} \geq \frac{1}{2} u_n$.
Par récurrence, pour tout l, $u_{n+l} \geq \frac{1}{2^l} u_n$.
Par conséquent,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| \geq u_n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = u_n.$$

Richard André-Jeannin a établi en 1989 que la constante

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

est irrationnelle.

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 2^{-n},$$

l'ensemble des réels représentés est

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 2^{-n},$$

l'ensemble des réels représentés est la réunion de

- l'intervalle $[0, 1]$ pour les réels dont la représentation n'utilise pas u_0,

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 2^{-n},$$

l'ensemble des réels représentés est la réunion de

- l'intervalle $[0, 1]$ pour les réels dont la représentation n'utilise pas u_0,
- l'intervalle $[2, 3]$ pour ceux dont la représentation utilise u_0,

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 2^{-n},$$

l'ensemble des réels représentés est la réunion de

- l'intervalle $[0, 1]$ pour les réels dont la représentation n'utilise pas u_0,
- l'intervalle $[2, 3]$ pour ceux dont la représentation utilise u_0,

$$S(u) = \{0, 2\} + [0, 1].$$

On adapte cet exemple pour obtenir la proposition suivante.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite nulle telle qu'il existe N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|.$$

Alors, $S(u)$ est une réunion finie d'intervalles (disjoints).

Exemple

Soit $\alpha > 1$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Exemple

Soit $\alpha > 1$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

On peut estimer le reste partiel de la série associé par comparaison serie/intégrale :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Exemple

Soit $\alpha > 1$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

On peut estimer le reste partiel de la série associé par comparaison serie/intégrale :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

À partir d'un certain rang, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Par conséquent, l'ensemble $S(u)$ est réunion finie d'intervalles disjoints.

Cas Cantor

Cas Cantor

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2 \cdot 3^{-(n+1)},$$

l'ensemble des réels représentés est

Cas Cantor

Exemple

Pour la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2 \cdot 3^{-(n+1)},$$

l'ensemble des réels représentés est l'ensemble triadique de Cantor.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, terme général d'une série absolument convergente et telle que, pour tout n,

$$|u_n| > \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|.$$

Alors, $S(u)$ est un ensemble de Cantor.

Pour la démonstration, on suppose la suite positive.

Notons, pour tout entier n,

Notons, pour tout entier n,

- A_n l'ensemble (fini) des réels qui peuvent être représentés avec les premières valeurs de la suite : u_0, ..., u_n,

Notons, pour tout entier n,

- A_n l'ensemble (fini) des réels qui peuvent être représentés avec les premières valeurs de la suite : u_0, ..., u_n,
- R_n le reste partiel
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Puis, pour tout entier n,

- pour tout $x \in A_n$, $J_{x,n}$ l'intervalle $[x, x + R_n]$.
  Pour $n = 0$, on obtient les deux intervalles

$$[0, R_0], \qquad [u_0, u_0 + R_0].$$

Pour $n = 1$, on obtient les quatre intervalles

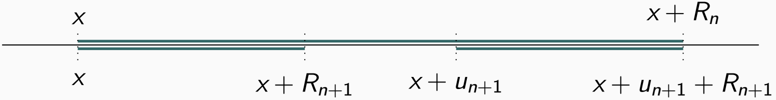
$$[0, R_1], \qquad [u_1, u_1 + R_1], \qquad [u_0, u_0 + R_1], \qquad [u_0 + u_1, u_0 + u_1 + R_1].$$

Puis, pour tout entier n,

- pour tout $x \in A_n$, $J_{x,n}$ l'intervalle $[x, x + R_n]$.
  Pour $n = 0$, on obtient les deux intervalles
  $$[0, R_0], \qquad [u_0, u_0 + R_0].$$
  Pour $n = 1$, on obtient les quatre intervalles
  $$[0, R_1], \qquad [u_1, u_1 + R_1], \qquad [u_0, u_0 + R_1], \qquad [u_0 + u_1, u_0 + u_1 + R_1].$$
- $K_n = \bigcup_{x \in A_n} J_{x,n}$.

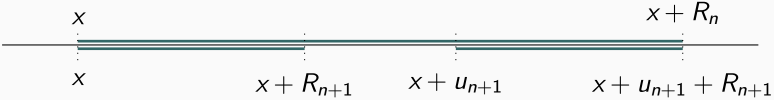
Remarquons que, pour tout n et tout $x \in A_n$, l'intervalle $J_{x,n}$ contient les deux intervalles

$$J_{x,n+1} = [x, x + R_{n+1}], \qquad J_{x+u_{n+1},n+1} = [x + u_{n+1}, x + u_{n+1} + R_{n+1}],$$



Remarquons que, pour tout n et tout $x \in A_n$, l'intervalle $J_{x,n}$ contient les deux intervalles

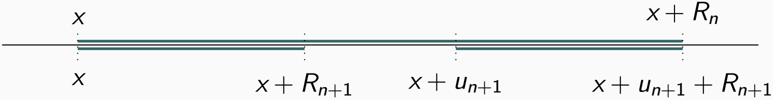
$$J_{x,n+1} = [x, x + R_{n+1}], \qquad J_{x+u_{n+1},n+1} = [x + u_{n+1}, x + u_{n+1} + R_{n+1}],$$



et ces deux intervalles sont disjoints puisque $u_{n+1} > R_{n+1}$.
On a enlevé une zone centrale de longueur $u_{n+1} - R_{n+1}$.

Remarquons que, pour tout n et tout $x \in A_n$, l'intervalle $J_{x,n}$ contient les deux intervalles

$$J_{x,n+1} = [x, x + R_{n+1}], \qquad J_{x+u_{n+1},n+1} = [x + u_{n+1}, x + u_{n+1} + R_{n+1}],$$

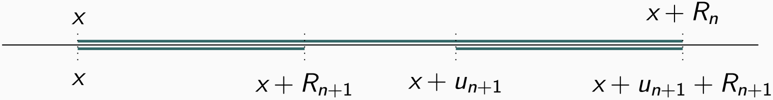


et ces deux intervalles sont disjoints puisque $u_{n+1} > R_{n+1}$.
On a enlevé une zone centrale de longueur $u_{n+1} - R_{n+1}$.

Par conséquent, K_n est la réunion de 2^{n+1} intervalles disjoints de longueur R_{n+1}

Remarquons que, pour tout n et tout $x \in A_n$, l'intervalle $J_{x,n}$ contient les deux intervalles

$$J_{x,n+1} = [x, x + R_{n+1}], \qquad J_{x+u_{n+1},n+1} = [x + u_{n+1}, x + u_{n+1} + R_{n+1}],$$

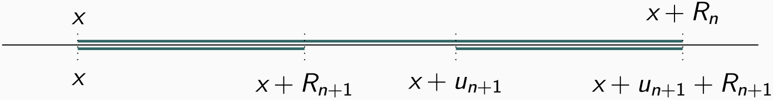


et ces deux intervalles sont disjoints puisque $u_{n+1} > R_{n+1}$.
On a enlevé une zone centrale de longueur $u_{n+1} - R_{n+1}$.

Par conséquent, K_n est la réunion de 2^{n+1} intervalles disjoints de longueur R_{n+1} et la suite $(K_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion.

Remarquons que, pour tout n et tout $x \in A_n$, l'intervalle $J_{x,n}$ contient les deux intervalles

$$J_{x,n+1} = [x, x + R_{n+1}], \qquad J_{x+u_{n+1},n+1} = [x + u_{n+1}, x + u_{n+1} + R_{n+1}],$$



et ces deux intervalles sont disjoints puisque $u_{n+1} > R_{n+1}$.
On a enlevé une zone centrale de longueur $u_{n+1} - R_{n+1}$.

Par conséquent, K_n est la réunion de 2^{n+1} intervalles disjoints de longueur R_{n+1} et la suite $(K_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion.

L'ensemble $K = \bigcap_n K_n$ est un ensemble de Cantor.

▷ Par construction, on obtient l'inclusion $S(u) \subset K$.

- ▷ Par construction, on obtient l'inclusion $S(u) \subset K$.
- ▷ Soit $a \in K$.

▷ Par construction, on obtient l'inclusion $S(u) \subset K$.

▷ Soit $a \in K$. Pour tout n, $a \in K_n$

▷ Par construction, on obtient l'inclusion $S(u) \subset K$.

▷ Soit $a \in K$. Pour tout n, $a \in K_n$: il existe $x_n \in A_n$ tel que $a \in J_{x_n,n}$

▷ Par construction, on obtient l'inclusion $S(u) \subset K$.

▷ Soit $a \in K$. Pour tout n, $a \in K_n$: il existe $x_n \in A_n$ tel que $a \in J_{x_n,n}$ c'est-à-dire

$$x_n \leq a \leq x_n + R_n.$$

▷ Par construction, on obtient l'inclusion $S(u) \subset K$.

▷ Soit $a \in K$. Pour tout n, $a \in K_n$: il existe $x_n \in A_n$ tel que $a \in J_{x_n,n}$ c'est-à-dire

$$x_n \leq a \leq x_n + R_n.$$

Pour tout n, $a - R_n \leq x_n \leq a$, et $R_n \to 0$: la suite $(x_n)_n$ converge vers a.

▷ Par construction, on obtient l'inclusion $S(u) \subset K$.

▷ Soit $a \in K$. Pour tout n, $a \in K_n$: il existe $x_n \in A_n$ tel que $a \in J_{x_n,n}$ c'est-à-dire

$$x_n \leq a \leq x_n + R_n.$$

Pour tout n, $a - R_n \leq x_n \leq a$, et $R_n \to 0$: la suite $(x_n)_n$ converge vers a.

Or, la suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans $S(u)$ qui est fermé : donc $a \in S(u)$.

▷ Par construction, on obtient l'inclusion $S(u) \subset K$.

▷ Soit $a \in K$. Pour tout n, $a \in K_n$: il existe $x_n \in A_n$ tel que $a \in J_{x_n,n}$ c'est-à-dire

$$x_n \leq a \leq x_n + R_n.$$

Pour tout n, $a - R_n \leq x_n \leq a$, et $R_n \to 0$: la suite $(x_n)_n$ converge vers a.

Or, la suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans $S(u)$ qui est fermé : donc $a \in S(u)$.

En conclusion, $S(u) = K$.

Proposition

Pour une suite $(u_n)_n$ vérifiant les conditions de la proposition précédente, la mesure (de Lebesgue) de $S(u)$ est la limite

$$\lim 2^{n+1} R_n.$$

En conservant les notations de la démonstration, on obtient toujours :

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, terme général d'une série absolument convergente. Alors,

$$S(u) = K.$$

En conservant les notations de la démonstration, on obtient toujours :

Proposition

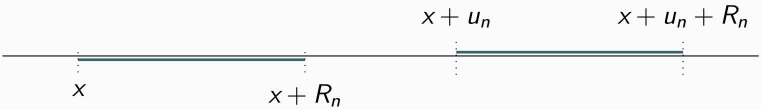
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, terme général d'une série absolument convergente. Alors,

$$S(u) = K.$$

C'est la nature de l'ensemble K qui change...

Le dessin suivant explique la situation pour une suite positive :

- Si $u_n > R_n$,

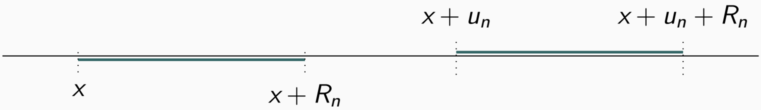


- Si $u_n = R_n$,

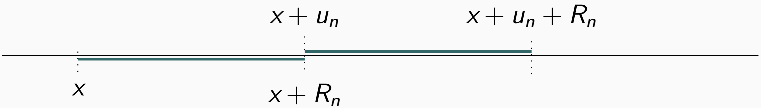
- Si $u_n < R_n$,

Le dessin suivant explique la situation pour une suite positive :

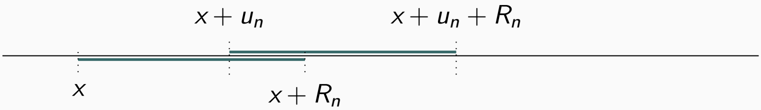
- Si $u_n > R_n$,



- Si $u_n = R_n$,



- Si $u_n < R_n$,



Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle définissant une série absolument convergente et telle que, pour tout une infinité de n,

$$|u_n| > \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|.$$

Alors, $S(u)$ admet une infinité de composantes connexes.

Cas hybride

Cas hybride

Proposition

Soit $\rho \in]0,1[$. Pour la suite géométrique $u = (\rho^n)_n$, l'ensemble des réels représentés est

- un intervalle si $\rho \geq \frac{1}{2}$,
- un ensemble de Cantor si $\rho < \frac{1}{2}$.

Cas hybride

Proposition

Soit $\rho \in]0,1[$. Pour la suite géométrique $u = (\rho^n)_n$, l'ensemble des réels représentés est

- un intervalle si $\rho \geq \frac{1}{2}$,
- un ensemble de Cantor si $\rho < \frac{1}{2}$.

Pour tout n,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^k = \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

et ce terme est

- soit toujours supérieur à ρ^n si $\frac{\rho}{1-\rho} \geq 1$, c'est-à-dire $\rho \geq \frac{1}{2}$,
- soit toujours strictement inférieur à ρ^n.

Voici un exemple typique des cas « intermédiaires ».

Exemple

Considérons la suite (décroissante) $(u_n)_{n\geq 1}$ définie, pour tout n, par

$$u_{2n-1} = 3 \cdot 4^{-n}, \qquad u_{2n} = 2 \cdot 4^{-n}.$$

Alors, pour tout n,

$$u_{2n} = 2 \cdot 4^{-n} > \frac{5}{3} \cdot 4^{-n} = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k$$

mais

$$u_{2n-1} = 3 \cdot 4^{-n} < \frac{11}{3} \cdot 4^{-n} = \sum_{k=2n}^{+\infty} u_k$$

Exemple (suite)

Remarquons que, pour tous $k \leq n$ et tout $c \in \{1,2,3\}$,

$$\frac{c}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{c-1}{4^k} + \sum_{l=k}^{n} \frac{3}{4^{l+1}} + \frac{2}{4^{n+1}}.$$

Exemple (suite)

Remarquons que, pour tous $k \leq n$ et tout $c \in \{1,2,3\}$,

$$\frac{c}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{c-1}{4^k} + \sum_{l=k}^{n} u_{2l+1} + u_{2(n+1)}.$$

Exemple (suite)

Remarquons que, pour tous $k \leq n$ et tout $c \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{c}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{c-1}{4^k} + \sum_{l=k}^{n} u_{2l+1} + u_{2(n+1)}.$$

Voici une utilisation de cette remarque pour obtenir une représentation par la suite $(u_n)_n$ d'un nombre à partir de son écriture en base 4 :

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3}$$

Exemple (suite)

Remarquons que, pour tous $k \leq n$ et tout $c \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{c}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{c-1}{4^k} + \sum_{l=k}^{n} u_{2l+1} + u_{2(n+1)}.$$

Voici une utilisation de cette remarque pour obtenir une représentation par la suite $(u_n)_n$ d'un nombre à partir de son écriture en base 4 :

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$$

Exemple (suite)

Remarquons que, pour tous $k \leq n$ et tout $c \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{c}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{c-1}{4^k} + \sum_{l=k}^{n} u_{2l+1} + u_{2(n+1)}.$$

Voici une utilisation de cette remarque pour obtenir une représentation par la suite $(u_n)_n$ d'un nombre à partir de son écriture en base 4 :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{1}{4^3}\end{aligned}$$

Exemple (suite)

Remarquons que, pour tous $k \leq n$ et tout $c \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{c}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{c-1}{4^k} + \sum_{l=k}^{n} u_{2l+1} + u_{2(n+1)}.$$

Voici une utilisation de cette remarque pour obtenir une représentation par la suite $(u_n)_n$ d'un nombre à partir de son écriture en base 4 :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{1}{4^3} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3}
\end{aligned}$$

Exemple (suite)

Remarquons que, pour tous $k \leq n$ et tout $c \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{c}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{c-1}{4^k} + \sum_{l=k}^{n} u_{2l+1} + u_{2(n+1)}.$$

Voici une utilisation de cette remarque pour obtenir une représentation par la suite $(u_n)_n$ d'un nombre à partir de son écriture en base 4 :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{1}{4^3} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} \\
&= \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3}
\end{aligned}$$

Exemple (suite)

Prenons un autre exemple :

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^6}$$

Exemple (suite)

Prenons un autre exemple :

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}$$

Exemple (suite)

Prenons un autre exemple :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6} &= \frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}\\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}\end{aligned}$$

Exemple (suite)

Prenons un autre exemple :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6} &= \frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}\\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}\\ &= \frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}\end{aligned}$$

Exemple (suite)

Prenons un autre exemple :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6} &= \frac{3}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}\\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}\\ &= \frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\frac{2}{4^6}\end{aligned}$$

Le procédé termine par une représentation lorsque le premier « chiffre » ne devient pas 1 (ici car il est initialement égal à 3).

Exemple (suite)

On en déduit, par récurrence sur $n \geq 1$, que tous les nombres de la forme

$$\frac{3}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{c_k}{4^k}$$

avec, pour tout k, $c_k \in \{0, 1, 2, 3\}$, se représentent avec la suite finie $(u_l)_{l \leq 2n}$.

Exemple (suite)

On en déduit, par récurrence sur $n \geq 1$, que tous les nombres de la forme

$$\frac{3}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{c_k}{4^k}$$

avec, pour tout k, $c_k \in \{0, 1, 2, 3\}$, se représentent avec la suite finie $(u_l)_{l \leq 2n}$.

Comme $S(u)$ est fermé, en passant à la limite, on obtient $[\frac{3}{4}, 1] \subset S(u)$.

Exemple (suite)

De même, on montre que tous les nombres dont l'écriture en base 4 commence par $\frac{3}{4^2}$ appartiennent à $S(u)$ d'où

$$[\tfrac{3}{4^2}, \tfrac{1}{4}] \subset S(u).$$

Exemple (suite)

De même, on montre que tous les nombres dont l'écriture en base 4 commence par $\frac{3}{4^2}$ appartiennent à $S(u)$ d'où

$$[\tfrac{3}{4^2}, \tfrac{1}{4}] \subset S(u).$$

On peut poursuivre ainsi et montrer que, pour tout entier k,

$$[\tfrac{3}{4^{k+1}}, \tfrac{1}{4^k}] \subset S(u).$$

Exemple (suite)

De même, on montre que tous les nombres dont l'écriture en base 4 commence par $\frac{3}{4^2}$ appartiennent à $S(u)$ d'où

$$[\tfrac{3}{4^2}, \tfrac{1}{4}] \subset S(u).$$

On peut poursuivre ainsi et montrer que, pour tout entier k,

$$[\tfrac{3}{4^{k+1}}, \tfrac{1}{4^k}] \subset S(u).$$

On peut également construire d'autres intervalles inclus dans $S(u)$ en translatant un intervalle $[\frac{3}{4^{k+1}}, \frac{1}{4^k}]$ avec une somme de termes $\frac{2}{4^l}$ pour des $l < k$.

Proposition

Il existe une suite $(u_n)_n$ de limite nulle telle que

- $S(u)$ est un compact non vide,
- $S(u)$ n'est pas une réunion finie d'intervalles,
- $S(u)$ est d'intérieur non vide donc n'est pas un ensemble de Cantor.

En étant un peu plus soigneux, on établit ainsi le résultat suivant.

Proposition

Il existe une suite $(u_n)_n$ de limite nulle telle que

- $S(u)$ est un compact non vide,
- $S(u)$ est l'adhérence de son intérieur,
- toute extrémité d'une composante non réduite à un point de $S(u)$ est point d'accumulation de composantes réduites à un point.

Définition

Un cantorvalle est une partie A de $\mathbb{R}$ telle que

- A est un compact non vide,
- A est l'adhérence de son intérieur,
- toute extrémité d'une composante non réduite à un point de A est point d'accumulation de composantes réduites à un point.

Exemple

Un cantorvalle peut être construit en partant de l'ensemble triadique de Cantor et en rajoutant les parties centrales enlevées aux étapes impaires.

Ensemble de Cantor

Exemple

Un cantorvalle peut être construit en partant de l'ensemble triadique de Cantor et en rajoutant les parties centrales enlevées aux étapes impaires.

Ensemble de Cantor

Cantorvalle

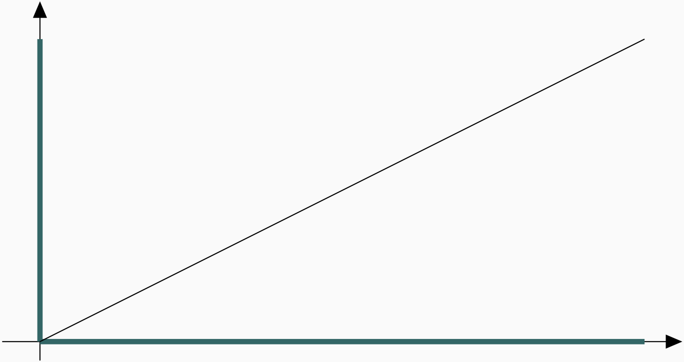
Proposition

- ▷ Deux ensembles de Cantor sont homéomorphes.
- ▷ Deux cantorvalles sont homéomorphes.

Proposition

- ▷ Deux ensembles de Cantor sont homéomorphes.
- ▷ Deux cantorvalles sont homéomorphes.

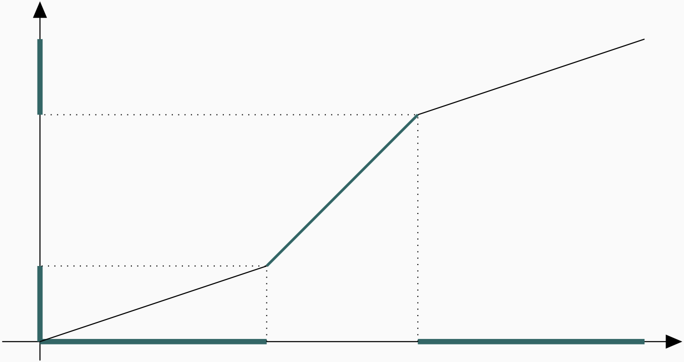
Voici un schéma pour comprendre la construction d'un homéomorphisme entre deux ensembles de Cantor :



Proposition

- ▷ Deux ensembles de Cantor sont homéomorphes.
- ▷ Deux cantorvalles sont homéomorphes.

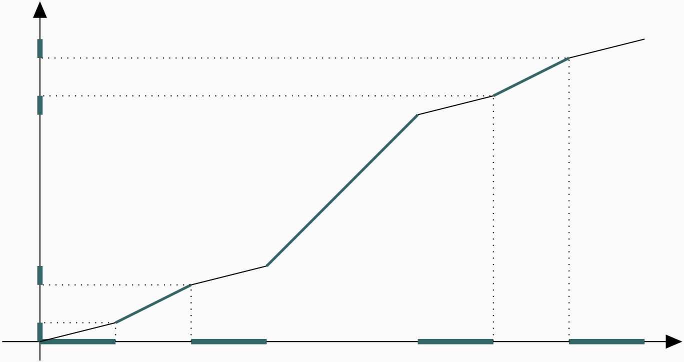
Voici un schéma pour comprendre la construction d'un homéomorphisme entre deux ensembles de Cantor :



Proposition

- ▷ Deux ensembles de Cantor sont homéomorphes.
- ▷ Deux cantorvalles sont homéomorphes.

Voici un schéma pour comprendre la construction d'un homéomorphisme entre deux ensembles de Cantor :



Énonçons la classification de Guthrie, Nymann et Sáenz (1989 et 2000).

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive telle que la série de terme général u_n converge. Alors, $S(u)$ est homéomorphe à l'un des trois ensembles suivants

- une réunion finie d'intervalles disjoints,
- un ensemble de Cantor,
- un cantorvalle.

Bilan

Le théorème précédent indique les différentes topologies possibles pour l'ensemble $S(u)$: la classification est terminée.

Bilan

Le théorème précédent indique les différentes topologies possibles pour l'ensemble $S(u)$: la classification est terminée...

mais, sauf dans quelques cas particuliers, on ne sait pas déterminer pour une suite donnée où se trouve $S(u)$ dans cette classification.

Bibliographie

- **On the Set of Partial Sums of an Infinite Series**, S. Kakeya, Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society. 2nd Series, 1913-1914, Volume 7, Issue 14, pp.250–251
- **Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen**, H. Hornich, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1941, Volume 49, Issue 1, pp.316–320
- **The topological structure of the set of subsums of an infinite series**, J. A. Guthrie, J. E. Nymann, 1989, Colloq. Math. 55, pp.323–327
- **On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series**, J. E. Nymann, R. Sáenz, Colloquium Mathematicae, 2000, Volume 83, Issue 1, pp.1–4

Bibliographie

- **Achievement Sets of Sequences**, R. Jones, The American Mathematical Monthly, 2011, Volume 118, Number 6, pp.508–521
- **Cantorvals and Subsum Sets of Null Sequences**, Z. Nitecki, The American Mathematical Monthly, 2015, Volume 122, Number 9, pp.862–870
- **Topological and algebraic aspects of subsums of series**
  A. Bartoszewicz, M.E. Filipczak, F. Prus-Wisniowski, *in* Traditional and present-day topics in real analysis, 2013, pp.345–366

Envoi

Exercice

Déterminer les suites réelles $(u_n)_n$ pour lesquelles il existe σ, une permutation de $\mathbb{N}$, telle que $(u_{\sigma(n)})_n$ est croissante à partir d'un certain rang.