# Par ici la monnaie!

Ce document a été préparé par Roger Mansuy pour la journée d'animation du jeudi 7 novembre 2019 à l'atelier mathématique du Collège Henri Becquerel à Avoine.

# I Quelques exercices pour commencer

Commençons avec quelques questions sur le rendu de monnaie :

- dans un premier temps, l'objectif est de rendre le compte juste en indiquant les valeurs (pièces ou billets) que l'on donne effectivement;
- dans un second temps, on essaie de rendre le plus petit nombre de valeurs.

#### Exercice 1.1

Aujourd'hui en France, on utilise des pièces ou billets de 1c, 2c, 5c, 10c, 20c, 50c,  $1 \in$ ,  $2 \in$ ,  $5 \in$  pour payer des sommes inférieures à  $10 \in$ . Supposons que vous soyez un commerçant et que vous ayez suffisamment de pièces et de billets dans votre tiroir-caisse : que rendez-vous à un client qui vous tend un billet de  $10 \in$  pour payer un achat de

1. 3€?

2. 1,5€?

3. 0,75€?

4. 0,37€?

### Exercice 1.2

Avant 2001 en France, on utilisait des pièces ou billets de 5c, 10c, 20c, 1/2F, 1F, 2F, 5F pour payer des sommes inférieures à 10F. Supposons que vous soyez un commerçant et que vous ayez suffisamment de pièces et de billets dans votre tiroir-caisse : que rendez-vous à un client qui vous tend une pièce de 10F pour payer un achat de

1. 3F?

2. 1.5F?

3. 0.75F?

4. 0.37F?

#### Exercice 1.3

En Birmanie pendant l'année 1986, on utilisait des pièces et billets de 1, 5, 10, 15, 35, 75 kyats.



Supposons que vous soyez un commerçant et que vous ayez suffisamment de pièces et de billets dans votre tiroir-caisse : que rendez-vous à un client qui vous tend un billet de 75 pour payer un achat de

1. 30?

2. 45?

3. 20?

4. 10?

## Remarque 1

L'année suivante, le dictateur birman Ne Win, suivant sa passion pour la numérologie, a décidé (contre toute logique) de remplacer les billets de 15, 35 et 75 par des billets de 45 et 90.

## Exercice 1.4

Avant le 15 février 1971, au Royaume-uni, on utilisait des pièces de 1d (penny), 3d, 6d, 1s (shilling soit 12d), 2s, 1 half crown (soit 2s et 6d), 1 crown (soit 5s), 1 pound (soit 20 s).

Supposons que vous soyez un commerçant et que vous ayez suffisamment de pièces et de billets dans votre tiroir-caisse : que rendez-vous à un client qui vous tend une pièce de 1 pound pour payer un achat de

1. 11s?

2. 3s?

3. 5d?

4. 3s et 6d?

# Remarque 2

Un système équivalent « livre/sou/denier » a été utilisé en France de la réforme monétaire de Charlemagne en 781 jusqu'à la réforme de la révolution le 18 germinal an III : une livre est divisée en 20 sous et un sou est lui-même divisé en 12 deniers.

# II Comparaisons de systèmes

## Exercice 1.5

On cherche à comparer deux systèmes de valeurs :

- un système inspiré du vieux système britannique avec des valeurs de 1, 3, 6, 12, 24, 30 et 60,
- un système inspiré du modèle actuel en euros 1, 2, 5, 10, 20, 50.
- 1. Pour chacun des systèmes et chaque somme s entre 1 et 100, indiquer le nombre minimal de valeurs nécessaires pour obtenir la somme s.
- 2. Quel est le meilleur système?

Dans l'exemple précédent, on remarque qu'il n'y a pas le même nombre de valeurs disponibles dans les deux systèmes. On fait donc évoluer le système « euro » en ajoutant une nouvelle valeur et on reprend la comparaison.

#### **Exercice 1.6**

Dans un système euros amélioré, on dispose des valeurs : 1, 2, 5, 10, 20, 32, 50.

- 1. Pour chaque somme s entre 1 et 100, indiquer le nombre minimal de valeurs nécessaires pour obtenir la somme s.
- 2. Ce système est-il meilleur que l'ancien système britannique?

# III Algorithme glouton

L'algorithme glouton pour le rendu de monnaie consiste à toujours rendre la plus grand valeur possible. Par exemple, si vous devez rendre 73 dans un système monétaire où les valeurs sont 1, 3, 6, 12, 24, 30 et 60,

- 1. vous rendez d'abord 60 car c'est la plus grande valeur possible inférieure à 73 et il reste 13;
- 2. vous rendez ensuite 12 car c'est la plus grande valeur possible inférieure à 13 et il reste 1;
- 3. vous rendez enfin 1.

# Exercice 1.7

Déterminer les valeurs rendues par l'algorithme glouton lorsqu'il faut rendre 64 avec le système 1, 2, 5, 10, 20, 32, 50. Est-ce optimal?

# **Exercice 1.8**

Considérons les deux systèmes 1, 2, 5, 10, 20, 32, 50 et 1, 2, 5, 10, 20, 50, 75.

- 1. Lequel est le meilleur si on applique l'algorithme glouton?
- 2. Lequel permet le meilleur rendu de monnaie?

Il faudra définir ce que l'on appelle « meilleur » dans les deux cas.