Théorie de Ramsey

Roger Mansuy

Cercle Pierre de Jumièges

14 juin 2016

Introduction

≪ **Complete disorder is impossible.** ≫

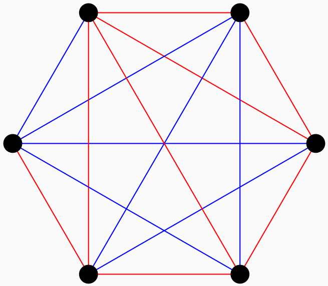
T. Motzkin

Considérons un théorème élémentaire et une bonne porte d'entrée au sujet du jour.

Proposition

Six personnes sont dans une pièce : il en existe trois qui se sont serré la main mutuellement ou trois telles qu'aucune d'entre elles n'a serré la main de l'une des autres.

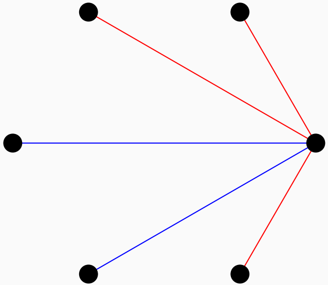
On va représenter la situation par un graphe. Chaque personne est un sommet. On indique une arête rouge entre deux sommets qui correspondent à des personnes s'étant serré la main, une arête bleue sinon.



Il s'agit alors de prouver qu'il existe un triangle monochrome quel que soit le coloriage de ce graphe.

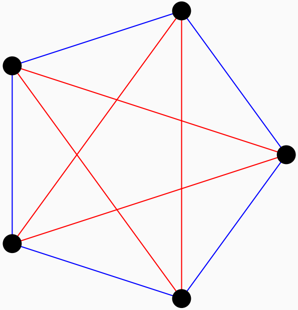
Preuve

Limitons-nous dans un premier temps à l'un des personnages.
Il y a 5 arêtes partant de ce sommet coloriées avec 2 couleurs : il en existe donc au moins 3 de la même couleur, par exemple, rouge.



▷ Si ces trois sommets sont reliés par des arêtes bleues, alors il y a un triangle bleu.
▷ Sinon deux sommets sont reliés par une arête rouge et avec le sommet de départ forment un triangle rouge.

En revanche, le théorème n'est plus toujours vrai pour seulement cinq personnes comme on peut le voir avec la configuration suivante :



Moralité

▷ On généralise le **principe des tiroirs** : si l'on dispose 3 chaussettes dans 2 tiroirs, il y a au moins 2 chaussettes dans le même tiroir.

▷ On indique qu'à partir de 6 personnes, toute situation contient la structure « triangle ». Même le hasard ne peut échapper à cette structure.

On pourrait recommencer...

Proposition

Neuf personnes sont dans une pièce : il en existe trois qui se sont serré la main mutuellement ou quatre telles qu'aucune d'entre elles n'a serré la main de l'une des autres.

Un théorème de la théorie de Ramsey est de la forme :

Théorème générique

Étant donné une structure, il existe une taille minimale telle que tout objet de taille supérieure contient cette structure.

≪ **Complete disorder is impossible.** ≫

T. Motzkin

Plan de l'exposé

Panorama de résultats

Commençons par énoncer quelques résultats de théorie de Ramsey afin d'illustrer le principe général de la théorie.

Théorème (Schur, 1917)

Soit $c \geq 2$ fixé.
Il existe un entier N tel que, pour tout coloriage de $E_n = \{1, \ldots, n\}$ pour $n \geq N$ avec c couleurs, il existe des entiers x, $y \in E_n$ tels que x, y et $x + y$ soient de la même couleur.

Par exemple, pour deux couleurs, l'entier N minimal est 5.

1 2 3 4 5

Théorème (van der Waerden, 1927)

Soit $c \geq 2$ et $\ell \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que, pour tout coloriage de $E_n = \{1, \ldots, n\}$ pour $n \geq N$ avec c couleurs, il existe une progression arithmétique de longueur ℓ monochrome.

Par exemple, pour $c = 2$ et $\ell = 3$, l'entier minimal est 9.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Théorème (Ramsey, 1930)

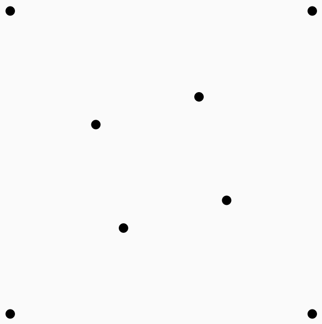
Soit $p \geq 2$ et $q \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que tout coloriage du graphe complet à $n \geq N$ sommets en deux couleurs rouge et bleu contient soit un sous-graphe complet rouge à p sommets, soit un sous-graphe complet bleu à q sommets.

Théorème (Erdös-Szekeres 1935, « Happy Ending »)

Soit $k \geq 3$ fixé.
Il existe un entier N tel que parmi tout ensemble de $n \geq N$ points du plan en position générale, on peut trouver k points qui sont les sommets d'un polygone convexe.

Pour $k = 4$, la plus petite valeur de l'entier N est 9.

Parmi 8 points du plan en position générale, il n'y en a pas nécessairement 5 qui sont les sommets d'un polygone convexe :



Théorème (Hales-Jewett, 1963)

Soit $r \geq 2$ et $c \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que tout coloriage des points de l'« hypercube » $\{1, 2, \ldots, r\}^n$ pour $n \geq N$ avec c couleurs admet une ligne, une colonne ou une « diagonale » monochrome.

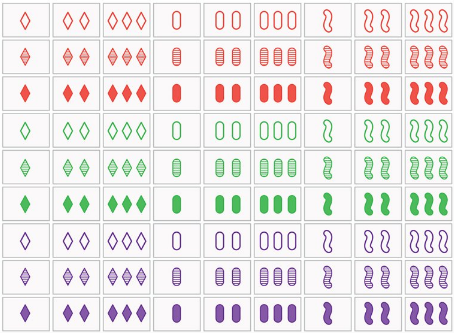
On remarque que ces théorèmes donnent l'existence de N sans préciser la valeur minimale de cet entier.

On obtient en général une borne très large qui n'a pas d'intérêt pratique. La deuxième étape d'une recherche sur ce sujet consiste à essayer de calculer/d'estimer ce nombre.

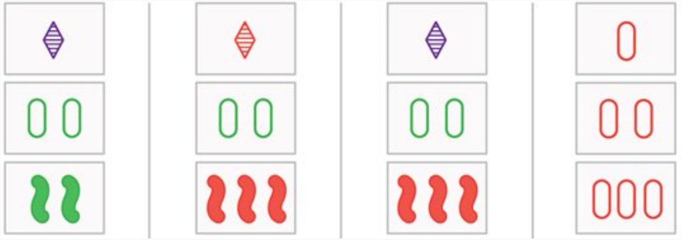
Voici un exemple très concret et ludique avec le Set, un jeu de cartes inventé dans les années 1970.

Chacune des 81 cartes comporte :

- des motifs losange, ovale ou vague
- en nombre 1, 2 ou 3
- de couleur verte, rouge ou violette
- de remplissage plein, vide ou hachuré



On dispose des cartes sur la table et chaque joueur doit trouver un lot de 3 cartes, appelé set, tel que pour chacun des quatre critères, les trois cartes ont la même valeur ou ont toutes des valeurs différentes.



images issues du Magazine Quanta.

Théorème

Parmi 21 cartes de ce jeu, il y a toujours au moins un set.

Que se passe-t-il si on augmente le nombre de critères (et donc la taille du set) ?
Un article de Croot-Lev-Pach (2016) donne un argument pour une borne supérieure de ce nombre.

Théorème de Ramsey

Rappelons le théorème déjà évoqué

Théorème (Ramsey)

Soit $p \geq 2$ et $q \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que tout coloriage du graphe complet à $n \geq N$ sommets en deux couleurs rouge et bleu contient soit un sous-graphe complet rouge à p sommets, soit un sous-graphe complet bleu à q sommets.

Définition

Notons $R(p, q)$ le plus petit entier N vérifiant la conclusion de ce théorème.

Proposition

Pour tout $q \geq 2$,
$$R(2,q) = q.$$

D'après le raisonnement de l'introduction,

Proposition

$$R(3,3) = 6.$$

Voici toutes les valeurs connues de $R(p, q)$

	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				
5	14	25					
6	18						
7	23						
8	28						
9	36						

Remarque

Le tableau est bien évidemment symétrique.

Suppose aliens invade the Earth and threaten to obliterate it in a year's time unless human beings can find the Ramsey number for red five and blue five. We could marshal the world's best minds and fastest computers, and within a year we could probably calculate the value.
If the Aliens demanded the Ramsey number for red six and blue six, we would have no choice but to launch a preemptive attack.

Paul Erdös

On montre le résultat par récurrence sur $p+q$. Voilà l'étape d'hérédité.

Preuve

Supposons établie l'existence de $R(p-1,q)$ et de $R(p,q-1)$.

Posons $N = R(p-1,q) + R(p,q-1)$ et considérons un graphe complet à N sommets coloriés avec deux couleurs.

Un sommet x admet $N-1$ voisins : soit il admet (au moins) $R(p-1,q)$ arêtes rouges, soit il admet (au moins) $R(p,q-1)$ arêtes bleues. Supposons, sans perte de généralité, que nous sommes dans le premier cas.

Par hypothèse de récurrence, parmi les voisins de x, on a

- soit un sous-graphe complet bleu à q sommets.
- soit un sous-graphe complet rouge à $p-1$ sommets : en ajoutant le sommet x, on obtient un sous-graphe complet rouge à p sommets du graphe de départ.

Corollaire

Pour tous $p,\ q \geq 3$,

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1).$$

Ce corollaire permet de calculer quelques petites valeurs mais s'avère inopérant pour un calcul systématique.

Voici (sans démonstration) quelques bornes

Proposition

- (Erdös-Szekeres)

$$R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}.$$

- (Rödl-Thomason, 1988)

$$R(p,p) \leq C\,\frac{\binom{2p-2}{p-1}}{\sqrt[3]{p-1}}.$$

Théorème de van der Waerden

Rappelons le théorème déjà évoqué

Théorème (van der Waerden, version finie)

Soit $c \geq 2$ et $\ell \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que, pour tout coloriage de $E_n = \{1, \ldots, n\}$ pour $n \geq N$ avec c couleurs, il existe une progression arithmétique de longueur ℓ monochrome.

Définition

Notons $W(\ell, c)$ le plus petit entier N vérifiant la conclusion de ce théorème.

Voici les valeurs connues (la longueur ℓ est en abscisse, le nombre de couleur c est en ordonnée) :

	2	3	4	5	6
2	3	9	35	178	1132
3	4	27	293		
4	5	76			
5	6				

Le valeur 293 a été obtenue en 2012 par Michal Kouril.

Proposition

Pour tout $c \geq 2$,

$$W(2, c) = c + 1.$$

Pour la démonstration, introduisons la notation suivante

Définition

Notons $W(k, \ell, c)$ le plus petit entier N (s'il existe) tel que $E_N = \{1, \dots, N\}$ admette

- soit une progression arithmétique monochrome de longueur $\ell + 1$,
- soit k progressions arithmétiques monochromes de longueur ℓ de couleurs différentes et se prolongeant en un même entier.

L'idée générale de la preuve est de montrer « $\forall c, \ W(\ell, c) < \infty$ » par récurrence sur ℓ.

- L'initialisation pour $\ell = 2$ est élémentaire car $W(2, c) = c + 1$.
- Pour la phase d'hérédité (c'est-à-dire le passage de ℓ à $\ell + 1$), on établit par récurrence sur $k \leq c$ que $W(k, \ell, c) < \infty$.
  Il suffit ensuite d'appliquer ce résultat pour $k = c$ afin de prolonger l'une des progressions arithmétiques de longueur ℓ en une progression arithmétique de longueur $\ell + 1$ en conservant le caractère monochrome.

Concentrons-nous sur l'étape d'hérédité de la seconde récurrence.

Soit $\ell \geq 2$ tel que, pour tout $c \geq 2$, $W(\ell, c) < \infty$ puis considérons $k < c$ tel que $W(k, \ell, c) < \infty$.

Posons

$$N = 2W(k, \ell, c)W(\ell, c^{W(k,\ell,c)}).$$

On découpe $E_N = \{1, \ldots, N\}$ en $2W(\ell, c^{W(k,\ell,c)})$ intervalles de longueur $W(k, \ell, c)$:

$$I_1, I_2, \ldots, I_{2W(\ell,c^{W(k,\ell,c)})}.$$

La « couleur » d'un intervalle est le $W(k,\ell,c)$-uplet des couleurs des entiers que le composent.

Il y a ainsi $c^{W(k,\ell,c)}$ « couleurs » possibles pour ces intervalles.

Par définition de $W(\ell, c^{W(k,\ell,c)})$, il existe ℓ intervalles en progression arithmétique de même « couleur » :

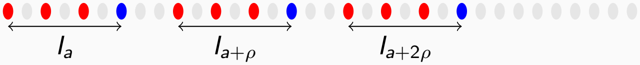
$$I_a,\ I_{a+\rho},\ \ldots, I_{a+(\ell-1)\rho}$$

avec $a+(\ell-1)\rho \leq W(\ell, c^{W(k,\ell,c)})$.

Si l'un de ces intervalles contient une progression arithmétique de longueur $\ell + 1$ monochrome, l'étape de récurrence est terminée.

Sinon, par définition de $W(k, \ell, c)$, I_a contient k progressions arithmétiques monochromes de longueur ℓ de couleurs différentes et se prolongeant en un même entier.

Voici une illustration avec $k = 3$ intervalles en progression arithmétique et de même « coloration » :



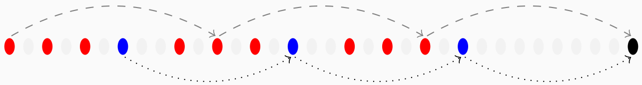
Dans chaque intervalle, on a représenté l'une des progressions arithmétiques de longueur $\ell = 3$ (en rouge) et le point commun de prolongement de chaque progression (en bleu).

Considérons l'une des progressions monochromes b, $b+r$, $\ldots$, $b+(\ell-1)r$ dans I_a.

On remarque alors que

- la suite arithmétique issue de b, de raison $\rho + r$ et de longueur ℓ est monochrome
- la suite arithmétique issue de $b + \ell r$, de raison ρ et de longueur ℓ est monochrome
- ces deux suites se prolongent en un même point

$$b + \ell(\rho + r) = (b + \ell r) + \ell\rho.$$



Avec ces suites des points de prolongement, on a obtenu une $k+1$ progression arithmétique monochrome ayant le même point de prolongement ce qui termine l'étape difficile de la preuve.

Cette démonstration donne la majoration suivante

Proposition

$$W(3,2) \leq 780.$$

On remarque que cette borne est peu précise puisque l'on peut montrer en réduisant (avec des propriétés de symétrie) l'étude à quelques cas simples que $W(3,2) = 9$.

Asymptotiquement la meilleure majoration obtenue est due à T. Gowers (avec des arguments élaborés sur l'étude des fonctions arithmétiques).

Proposition

Pour tout $\ell \geq 2$,

$$W(\ell, 2) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{\ell+9}}}}}.$$

Montrons la minoration suivante (non optimale).

Proposition

Pour tout ℓ assez grand,

$$W(\ell, c) \geq \sqrt{(\ell - 1)c^{\ell-1}}.$$

Preuve

Considérons un coloriage de $E_N = \{1, \dots, N\}$ tiré uniformément. Alors la probabilité d'obtenir une progression arithmétique de longueur ℓ est (en distinguant choix de la couleur, du point de départ, de la raison et des couleurs des autres entiers)

$$cN \left\lfloor \frac{N}{\ell - 1} \right\rfloor c^{N-\ell} \frac{1}{c^N} \leq \frac{N^2}{(\ell - 1)c^{\ell-1}}.$$

Ainsi, si $N < \sqrt{(\ell - 1)c^{\ell-1}}$, cette probabilité est strictement inférieure à 1 :

$$W(\ell, c) \geq \sqrt{(\ell - 1)c^{\ell-1}}.$$

Comme pour le théorème de Ramsey, il existe des variantes « asymétriques ».

Théorème

Soit $c \geq 2$ et $\ell_1, \dots, \ell_c \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que, pour tout coloriage de $E_n = \{1, \dots, n\}$ pour $n \geq N$ avec c couleurs, il existe une couleur k et une progression arithmétique de longueur ℓ_k monochrome de couleur k.

Énoncés infinis

Tous les théorèmes évoqués ici concernent des ensembles finis. Ils admettent des versions infinies équivalentes via un argument de compacité.

Théorème (van der Waerden, version finie)

Soit $c \geq 2$ et $\ell \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que, pour tout coloriage de $E_n = \{1, \ldots, n\}$ pour $n \geq N$ avec c couleurs, il existe une progression arithmétique de longueur ℓ monochrome.

Théorème (van der Waerden, version infinie)

Soit $c \geq 2$ fixé.
Pour tout coloriage de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec c couleurs, il existe une couleur pour laquelle il y a des progressions arithmétiques de toute longueur.

Remarque

Attention à ne pas se méprendre sur la conclusion du théorème de van der Waerden (version infinie) :

il existe des coloriages de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ sans qu'il y ait de progression arithmétique monochrome infinie.

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ \ldots$$

Il est clair que la version finie entraîne la version infinie.

Preuve

Pour tout ℓ, il existe une couleur contenant une progression arithmétique de longueur ℓ.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de couleurs, il existe une couleur qui correspond à une infinité de ℓ et donc (quitte à raccourcir certaines progressions) contient des progressions arithmétiques de toute longueur.

La réciproque requiert un argument plus élaboré appelé argument de compacité (nom que l'on justifiera par la suite).

Preuve

Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout n, il existe une fonction de coloriage partiel

$$f_n : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, c\}$$

n'admettant aucune progression arithmétique monochrome de longueur ℓ.
Définissons par récurrence une fonction de coloriage

$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{1, \ldots, c\}$$

- $f(1) = c_1$ où c_1 vérifie que l'ensemble $\{n,\ f_n(1) = c_1\}$ est infini
- $f(2) = c_2$ où c_2 vérifie que l'ensemble $\{n,\ f_n(1) = c_1,\ f_n(2) = c_2\}$ est infini
- ...

Preuve

Par hypothèse (van der Waerden, version infinie), il existe une progression arithmétique de longueur ℓ monochrome pour f. Notons N sa plus grande valeur.

Par construction, f coïncide sur $\{1, \ldots, p\}$ avec f_p pour un certain $p \geq N$.

Comme f_p n'admet aucune progression arithmétique monochrome, on obtient une contradiction.

Remarque

L'ensemble $\{1, \ldots, c\}$ est fini donc compact pour sa topologie "pleine".

L'ensemble des fonctions de coloriage $K = \{1, \ldots, c\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est à son tour compact au sens de la topologie produit.

L'ensemble des fonctions de coloriage admettant une progression arithmétique de longueur ℓ monochrome parmi $\{1, \ldots, n\}$ est un ouvert pour la topologie produit, noté O_n.

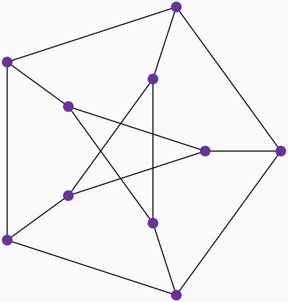
Le théorème de van der Waerden (version infinie) indique que $K \subset \bigcup_n O_n$.

D'après la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un nombre fini d'ouverts recouvrant K. L'entier N défini comme la plus grande valeur d'une progression arithmétique correspondant à l'un de ces ouverts satisfait le théorème de van der Waerden (version finie).

Pour aller plus loin

- Solutions d'expert (vol.1), Arthur Engel, Cassini/POLE, 2007
- Ramsey theory on the Integers, Bruce M. Landman, Aaron Robertson, American Math Society, 2014
- Ramsey theory : Yesterday, Today, and Tomorrow, Alexander Soifer, Birkhäuser, 2010

Merci !



Exposé dédié à André Warusfel, Warus