Conway et le solitaire

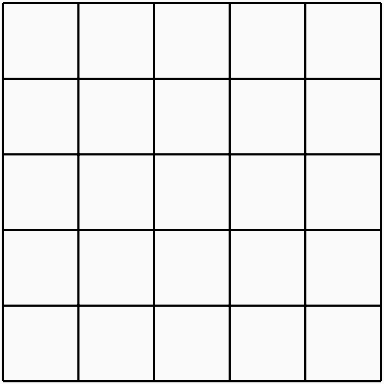
Roger Mansuy

John Horton Conway (1937 -)

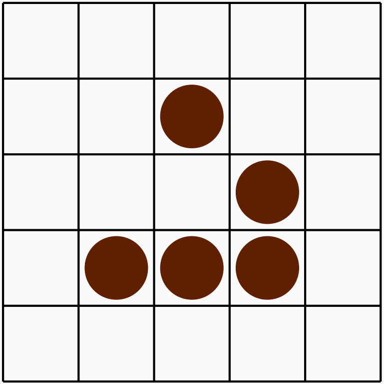
- La suite audioactive est la suite d'entiers $(L_n)_n$ dont les premiers termes sont

$$\begin{aligned}
L_1 &= 1 \\
L_2 &= 11 \\
L_3 &= 21 \\
L_4 &= 1211 \\
L_5 &= 111221 \\
L_6 &= 312211 \\
L_7 &= 13112221 \\
L_8 &= 1113213211 \\
L_9 &= 31131211131221
\end{aligned}$$

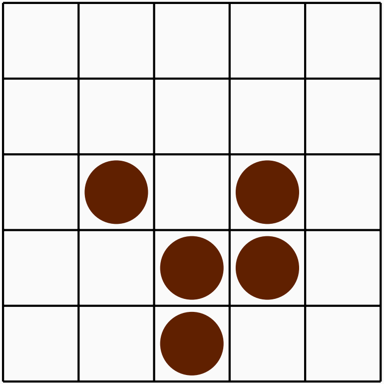
- Le **jeu de la vie** est un automate cellulaire où chaque cellule évolue selon les règles suivantes
  - une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes redevient vivante.
  - si une cellule vivante n'a pas deux ou trois voisines vivantes, elle meurt.



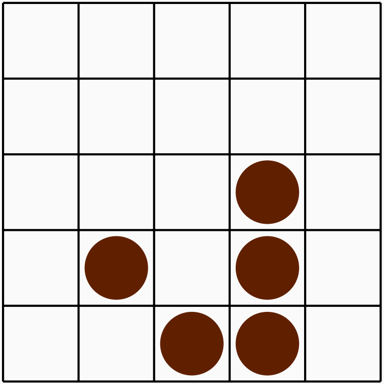
- Le **jeu de la vie** est un automate cellulaire où chaque cellule évolue selon les règles suivantes
  - une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes redevient vivante.
  - si une cellule vivante n'a pas deux ou trois voisines vivantes, elle meurt.



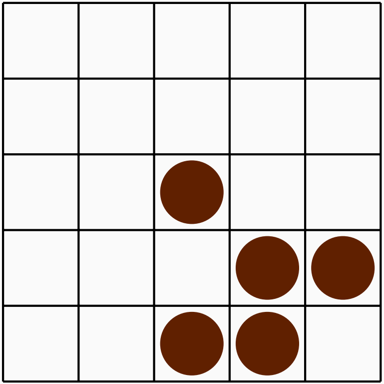
- Le **jeu de la vie** est un automate cellulaire où chaque cellule évolue selon les règles suivantes
  - une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes redevient vivante.
  - si une cellule vivante n'a pas deux ou trois voisines vivantes, elle meurt.



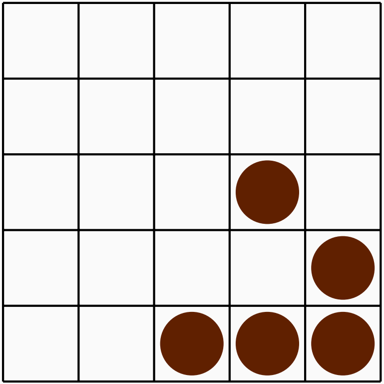
- Le **jeu de la vie** est un automate cellulaire où chaque cellule évolue selon les règles suivantes
  - une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes redevient vivante.
  - si une cellule vivante n'a pas deux ou trois voisines vivantes, elle meurt.



- Le **jeu de la vie** est un automate cellulaire où chaque cellule évolue selon les règles suivantes
  - une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes redevient vivante.
  - si une cellule vivante n'a pas deux ou trois voisines vivantes, elle meurt.



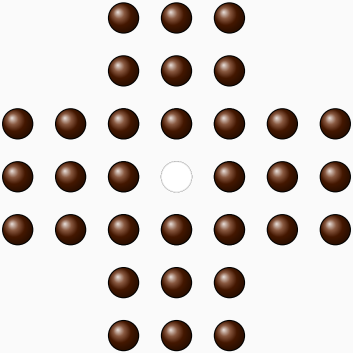
- Le **jeu de la vie** est un automate cellulaire où chaque cellule évolue selon les règles suivantes
  - une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes redevient vivante.
  - si une cellule vivante n'a pas deux ou trois voisines vivantes, elle meurt.



Auteur de deux ouvrages sur la théorie des jeux combinatoires

- ***On Numbers and Games***, John Conway
- ***Winning Ways for your Mathematical Plays***, Elwyn Berlekamp, John Conway, et Richard Guy

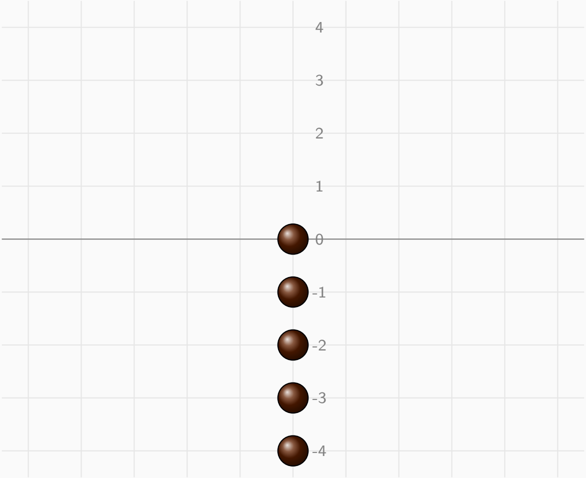
Jeu du solitaire

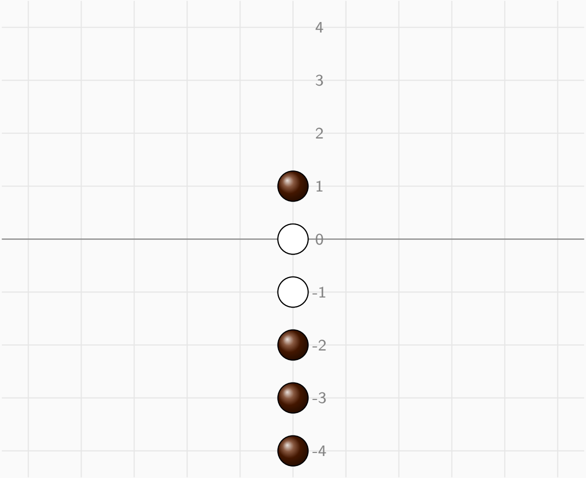


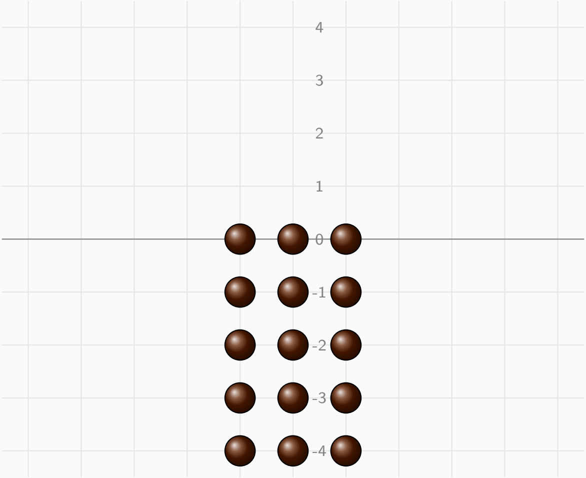
- On conserve les règles de déplacement/enlèvement des billes.

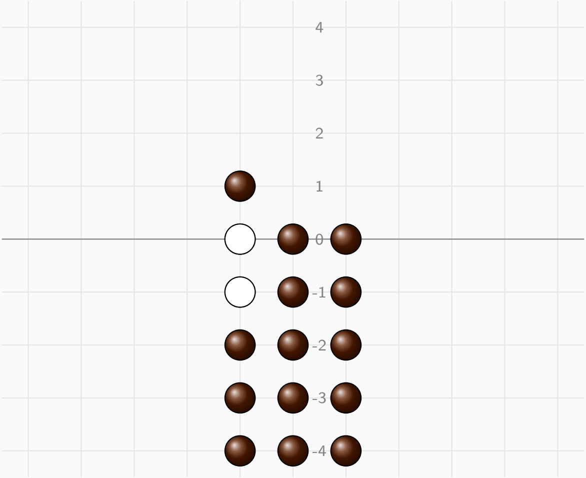
- On conserve les règles de déplacement/enlèvement des billes.
- On change la configuration initiale des billes.

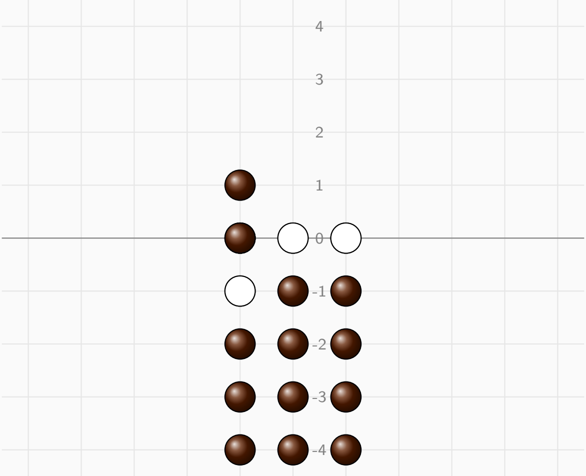
- On conserve les règles de déplacement/enlèvement des billes.
- On change la configuration initiale des billes.
- Mais le but change : partant d'une configuration initiale (des billes disposées sur le quadrillage des points à coordonnées entières), on cherche à amener une bille le plus haut possible (c'est-à-dire avec la plus grande ordonnée).

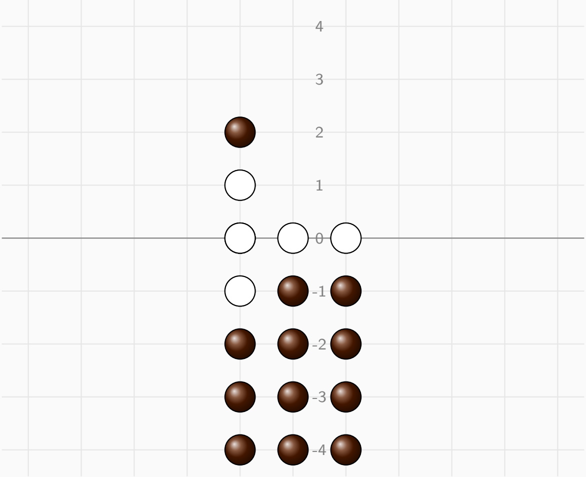

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

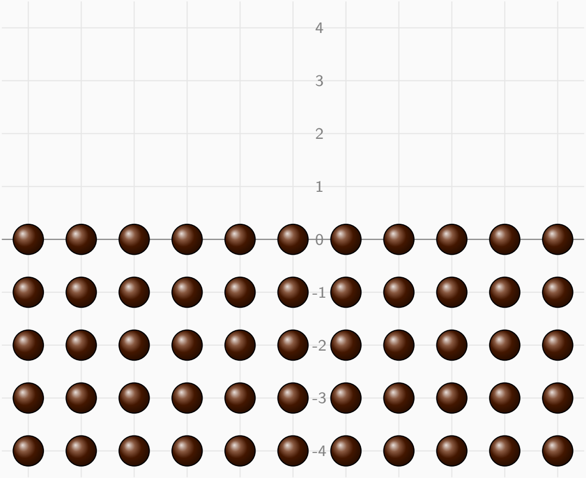

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

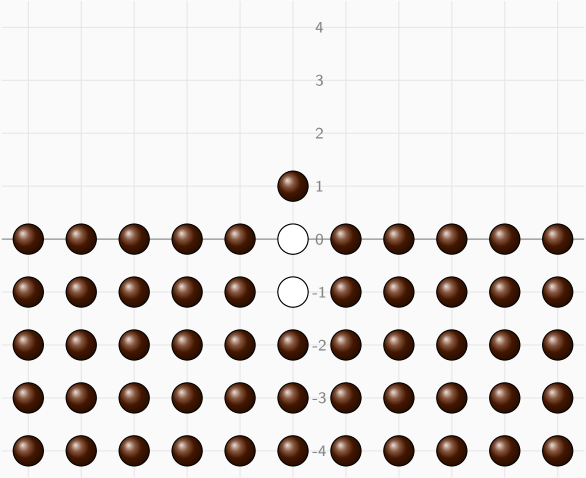

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

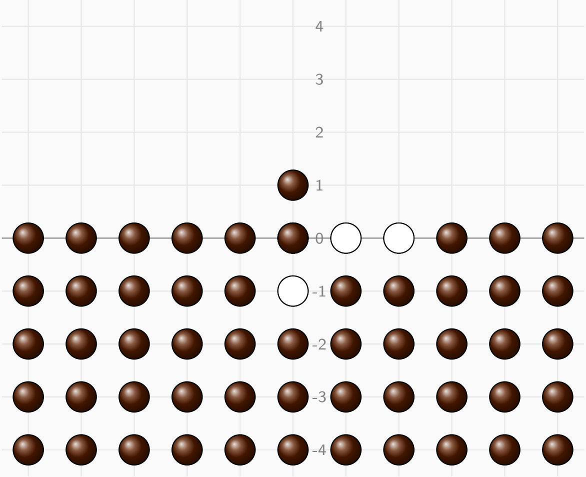

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

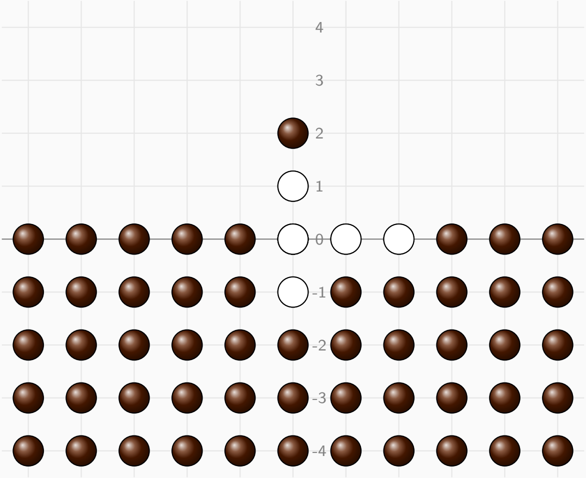

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

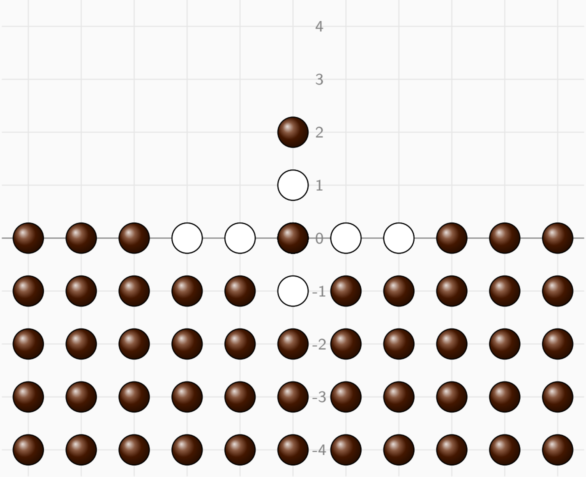

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

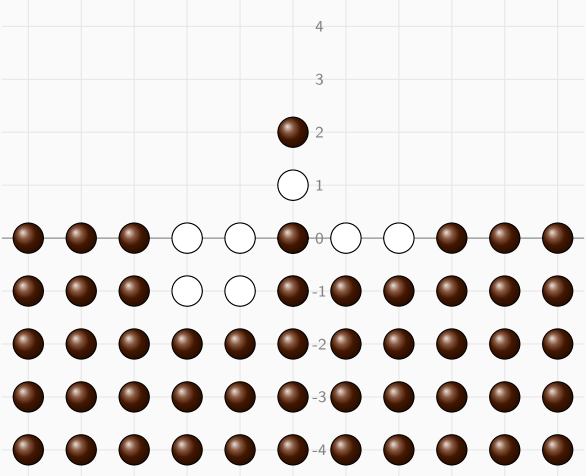

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

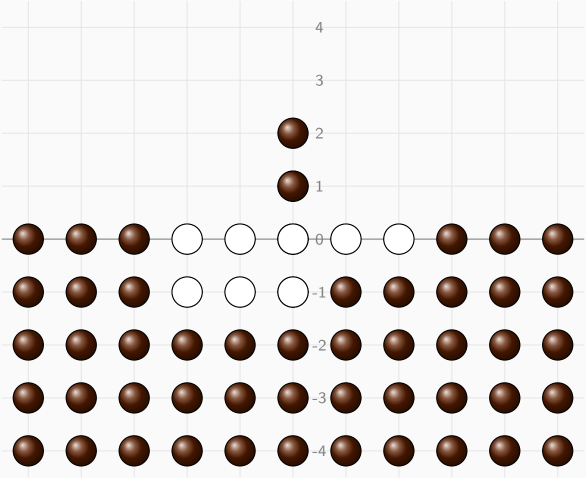

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

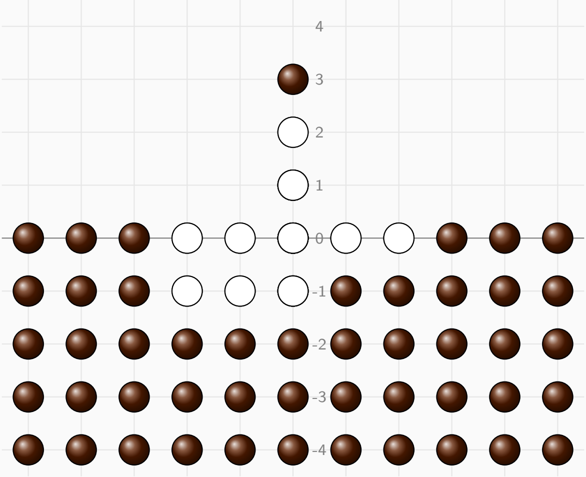

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4



4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

Proposition

Pour le jeu de solitaire avec tous le demi-plan inférieur initialement rempli, on ne peut pas atteindre l'ordonnée 5.

Proposition

Pour le jeu de solitaire avec tous le demi-plan inférieur initialement rempli, on ne peut pas atteindre l'ordonnée 5.

Exercice

Montrer que l'on peut atteindre l'ordonnée 4 à partir de cette configuration initiale.

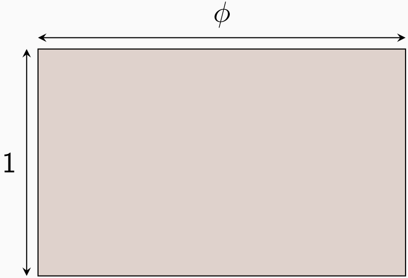
Proposition

Pour le jeu de solitaire avec tous le demi-plan inférieur initialement rempli, on ne peut pas atteindre l'ordonnée 5.

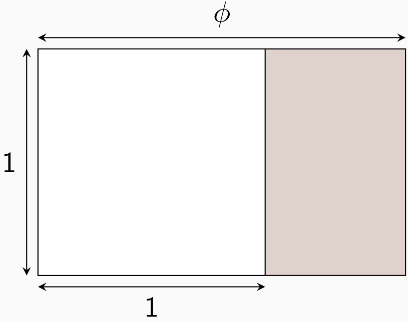
Exercice

Montrer que l'on peut atteindre l'ordonnée 4 à partir de cette configuration initiale.

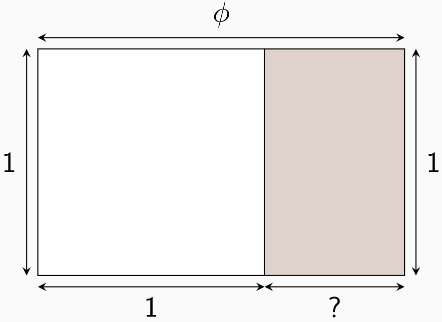
Laissé au joueur.



On cherche ϕ tel que le rectangle obtenu en retirant un carré de côté 1 à un rectangle de largeur 1 et de longueur ϕ soit « proportionnel » au rectangle initial.



On cherche ϕ tel que le rectangle obtenu en retirant un carré de côté 1 à un rectangle de largeur 1 et de longueur ϕ soit « proportionnel » au rectangle initial.



On cherche ϕ tel que le rectangle obtenu en retirant un carré de côté 1 à un rectangle de largeur 1 et de longueur ϕ soit « proportionnel » au rectangle initial.

longueur du grand		longueur du petit
ϕ	$\rightarrow$	1
1	$\rightarrow$	

longueur du grand		longueur du petit
ϕ	$\rightarrow$	1
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{\phi}$

longueur du grand		longueur du petit
ϕ	$\rightarrow$	1
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{\phi}$

D'où $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

longueur du grand		longueur du petit
ϕ	$\rightarrow$	1
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{\phi}$

D'où $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

D'où $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

longueur du grand		longueur du petit
ϕ	$\rightarrow$	1
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{\phi}$

D'où $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

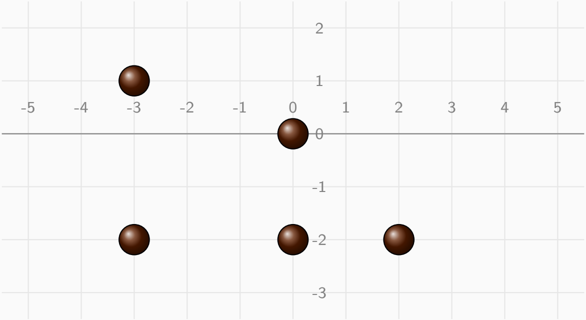
D'où $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

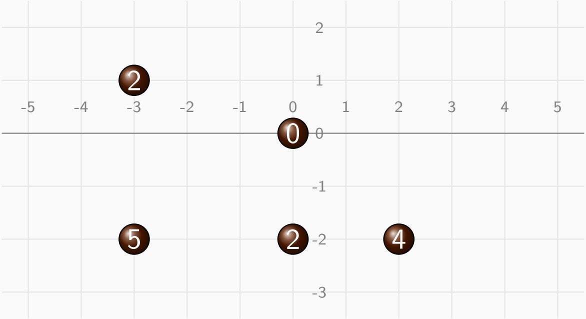
Finalement, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Définition

La valeur de la fonction de Conway en une configuration C de billes est la somme pour chaque position $(x, y) \in C$ des quantités

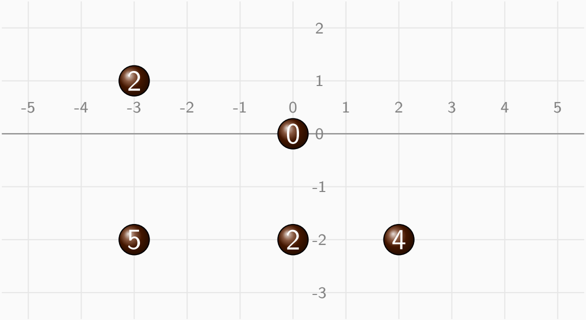
$$\frac{1}{\phi^{|x|-y}}$$


-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
2 1 0 -1 -2 -3



On calcule les entiers $N = |x| - y$ associés à chaque position (x, y) :

$$0, 2, 2, 4, 5.$$



On calcule les entiers $N = |x| - y$ associés à chaque position (x, y) :

$$0, 2, 2, 4, 5.$$

On en déduit la valeur

$$\frac{1}{\phi^0} + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^5}.$$

Proposition

La fonction de Conway décroît au cours d'une partie.

Pour la preuve, il suffit d'étudier tous les mouvements possibles.

- (x, y) et $(x, y+1) \to (x, y+2)$.

On remplace $\dfrac{1}{\phi^{|x|-y}} + \dfrac{1}{\phi^{|x|-y-1}}$ par

$$\frac{1}{\phi^{|x|-y-2}} = \frac{1}{\phi^{|x|-y}}\phi^2 = \frac{1}{\phi^{|x|-y}}(\phi+1) = \frac{1}{\phi^{|x|-y}} + \frac{1}{\phi^{|x|-y-1}}.$$

- (x, y) et $(x, y+1) \to (x, y+2)$.

On remplace $\dfrac{1}{\phi^{|x|-y}} + \dfrac{1}{\phi^{|x|-y-1}}$ par

$$\frac{1}{\phi^{|x|-y-2}} = \frac{1}{\phi^{|x|-y}}\phi^2 = \frac{1}{\phi^{|x|-y}}(\phi+1) = \frac{1}{\phi^{|x|-y}} + \frac{1}{\phi^{|x|-y-1}}.$$

- (x, y) et $(x+1, y) \to (x+1, y)$ avec $x \geq 0$.

On remplace $\dfrac{1}{\phi^{x-y}} + \dfrac{1}{\phi^{x-y+1}}$ par

$$\frac{1}{\phi^{x-y+2}} < \frac{1}{\phi^{|x|-y}} < \frac{1}{\phi^{|x|-y}} + \frac{1}{\phi^{|x|-y+1}}.$$

Proposition

Pour le demi-plan complet, la fonction de Conway vaut

$$C_0 = \sum_{y=-\infty}^{0} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\phi^{|x|-y}} = \frac{1}{\phi^{-5}}.$$

Montrons le théorème de Conway en raisonnant par l'absurde.

Montrons le théorème de Conway en raisonnant par l'absurde.

Preuve

Si on peut amener une bille à l'ordonnée 5, alors

Montrons le théorème de Conway en raisonnant par l'absurde.

Preuve

Si on peut amener une bille à l'ordonnée 5, alors

- quitte à translater, on peut amener une bille en position $(0, 5)$,

Montrons le théorème de Conway en raisonnant par l'absurde.

Preuve

Si on peut amener une bille à l'ordonnée 5, alors

- quitte à translater, on peut amener une bille en position $(0, 5)$,
- la configuration finale comporte au moins une autre bille donc sa fonction de Conway vaut $\frac{1}{\phi^{|0|-5}} + \ldots > \frac{1}{\phi^{-5}} = C_0$,

Montrons le théorème de Conway en raisonnant par l'absurde.

Preuve

Si on peut amener une bille à l'ordonnée 5, alors

- quitte à translater, on peut amener une bille en position $(0,5)$,
- la configuration finale comporte au moins une autre bille donc sa fonction de Conway vaut $\frac{1}{\phi^{|0|-5}} + \ldots > \frac{1}{\phi^{-5}} = C_0$,
- la fonction de Conway est décroissante de C_0 vers une valeur strictement supérieure à C_0,

Montrons le théorème de Conway en raisonnant par l'absurde.

Preuve

Si on peut amener une bille à l'ordonnée 5, alors

- quitte à translater, on peut amener une bille en position $(0,5)$,
- la configuration finale comporte au moins une autre bille donc sa fonction de Conway vaut $\frac{1}{\phi^{|0|-5}} + \ldots > \frac{1}{\phi^{-5}} = C_0$,
- la fonction de Conway est décroissante de C_0 vers une valeur strictement supérieure à C_0,

contradiction !