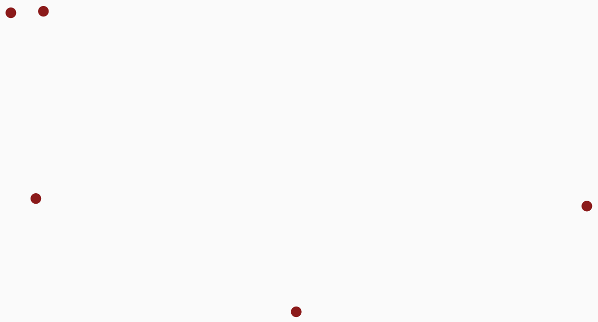
Le problème des distances d'Erdös

Roger Mansuy

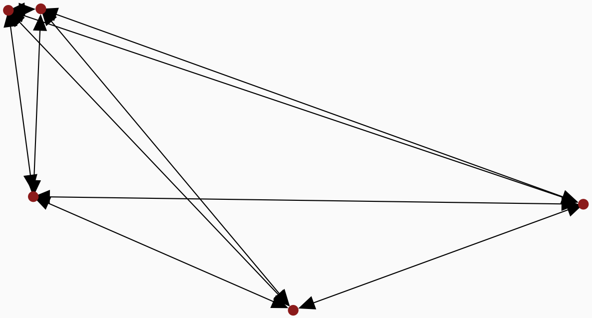
Distances

Voici 5 points du plan



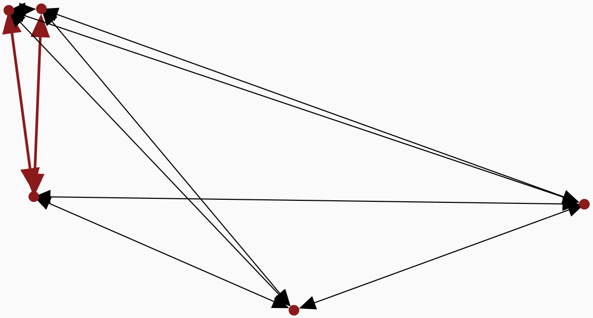
Distances

Voici 5 points du plan ; ils définissent 10 segments



Distances

Voici 5 points du plan ; ils définissent 10 segments et 9 distances distinctes.

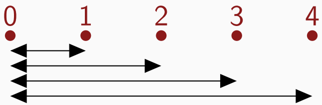


Une question naturelle est de savoir combien on obtient de distances différentes avec un ensemble de n points du plan.

- Question difficile.
- Grosse dépendance à l'ensemble de points de départ.

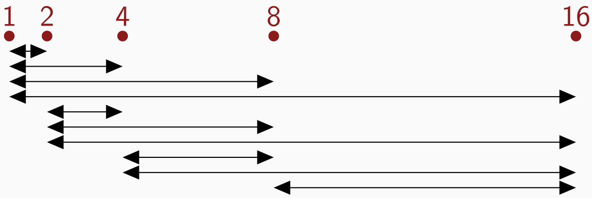
Avec n points de coodonnées $(k, 0)$, on obtient distances.

Avec n points de coodonnées $(k, 0)$, on obtient $n - 1$ distances.

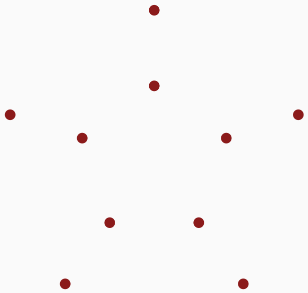


Avec n points de coordonnées $(2^k, 0)$, on obtient distances.

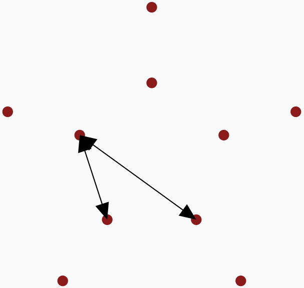
Avec n points de coordonnées $(2^k, 0)$, on obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ distances.



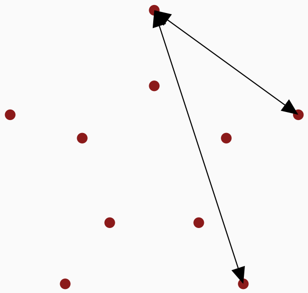
Avec ces 10 points, on obtient distances.



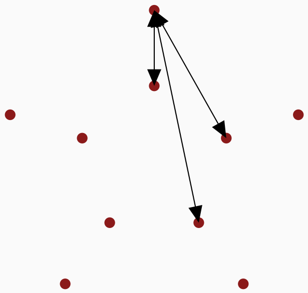
Avec ces 10 points, on obtient distances.



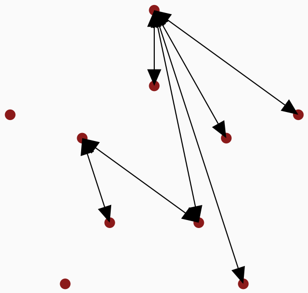
Avec ces 10 points, on obtient distances.



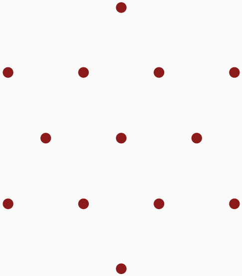
Avec ces 10 points, on obtient distances.



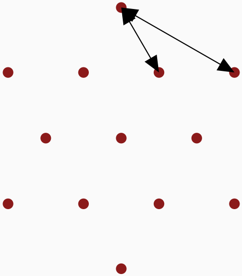
Avec ces 10 points, on obtient 7 distances.



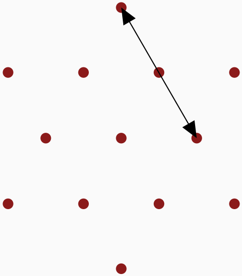
Avec ces 13 points, on obtient distances.



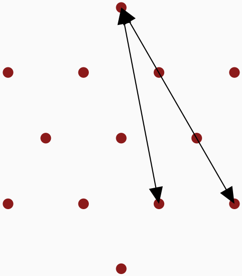
Avec ces 13 points, on obtient distances.



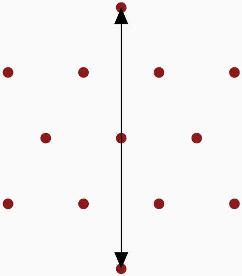
Avec ces 13 points, on obtient distances.



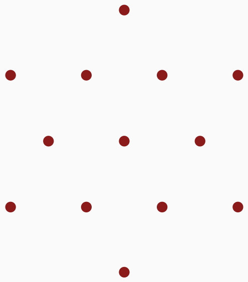
Avec ces 13 points, on obtient distances.



Avec ces 13 points, on obtient distances.



Avec ces 13 points, on obtient 6 distances.



Définition

$g(n)$ désigne le nombre minimal de distances distinctes entre deux points pour un ensemble de n points distincts.

Définition

$g(n)$ désigne le nombre minimal de distances distinctes entre deux points pour un ensemble de n points distincts.

Exemple

Voici quelques exemples de calcul de $g(n)$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$g(n)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6

Conjecture d'Erdös (1946)

Conjecture

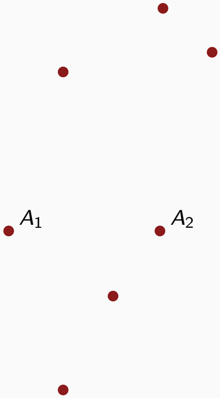
Pour tout $\alpha < 1$, $g(n) \gg n^\alpha$.

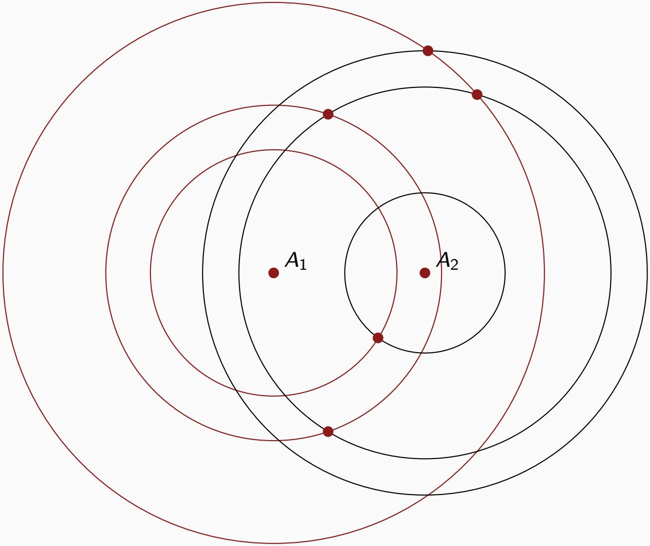
Rappelons que $u_n \gg v_n$ s'il existe une constante $C > 0$ et un entier N tels que

$$\forall n \geq N, \qquad u_n \geq C v_n.$$

Première preuve pour $\alpha = \frac{1}{2}$

Considérons n points $A_1, \ldots, A_n$ et traçons les cercles de centre A_1 ou A_2 passant par $A_3, \ldots, A_n$.


A_1
A_2


A_1
A_2

En notant c_1 et c_2, le nombre de cercles obtenus pour chaque centre,

$$n - 2 \leq 2c_1c_2.$$

En notant c_1 et c_2, le nombre de cercles obtenus pour chaque centre,

$$n - 2 \leq 2c_1c_2.$$

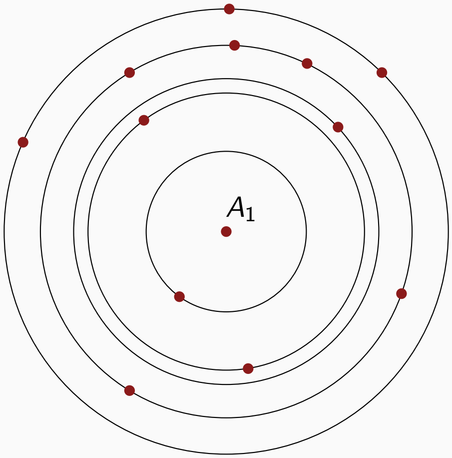
Ainsi, $c_1 \geq \sqrt{\frac{n-2}{2}}$ ou $c_2 \geq \sqrt{\frac{n-2}{2}}$ donc il y a au moins $\sqrt{\frac{n-2}{2}}$ distances différentes.
En conclusion, $g(n) \gg \sqrt{n}$.

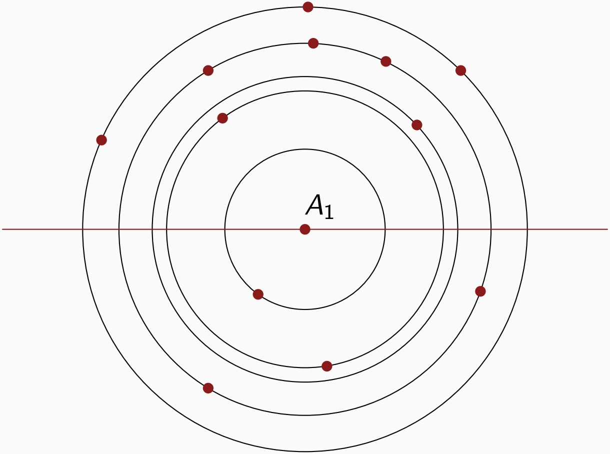
Deuxième preuve pour $\alpha = \frac{1}{2}$

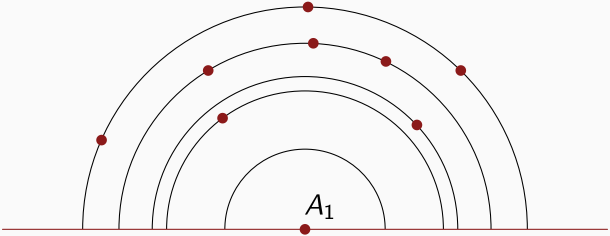
Considérons n points $A_1, \ldots, A_n$ et traçons les cercles de centre A_1 passant par $A_2, \ldots, A_n$.

Coupons la figure en deux avec une droite passant par A_1.

D'après le principe des tiroirs, l'une de ces deux moitiés contient au moins $\frac{n-1}{2}$ points. On ne considère désormais que cette moitié.


A_1


A_1

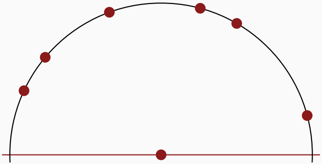

A_1

Notons c le nombre de cercles.

- Le nombre de distances distinctes est supérieur ou égal à c.

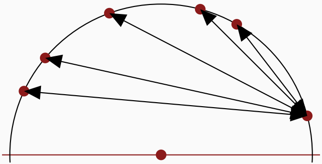
Notons c le nombre de cercles.

- Le nombre de distances distinctes est supérieur ou égal à c.
- Il y a au moins un demi-cercle qui contient $\frac{n-1}{2c}$ points.



Notons c le nombre de cercles.

- Le nombre de distances distinctes est supérieur ou égal à c.
- Il y a au moins un demi-cercle qui contient $\frac{n-1}{2c}$ points.



Ceux-ci définissent au moins $\frac{n-1}{2c} - 1$ distances distinctes.

Ainsi, le nombre de distances distinctes est supérieur ou égal à

$$\max\left(c, \frac{n-1}{2c} - 1\right),$$

Ainsi, le nombre de distances distinctes est supérieur ou égal à

$$\max\left(c, \frac{n-1}{2c} - 1\right),$$

donc $g(n) \gg \sqrt{n}$.

Intermède : inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Soit $x_1 \dots, x_n, y_1 \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Troisième preuve pour $\alpha = \frac{1}{2}$

Considérons n points $A_1, \ldots, A_n$ et ℓ une distance entre deux de ces points.

Notons N_ℓ le nombre de paires de points séparés par la distance ℓ. Alors,

$$N_\ell = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell} = \sum_{i=1}^{n} 1. \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell} \right)$$

Troisième preuve pour $\alpha = \frac{1}{2}$

Considérons n points $A_1, \ldots, A_n$ et ℓ une distance entre deux de ces points.

Notons N_ℓ le nombre de paires de points séparés par la distance ℓ. Alors,

$$\begin{aligned} N_\ell &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell} = \sum_{i=1}^{n} 1.\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell}\right) \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell}\right)^2} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$

Troisième preuve pour $\alpha = \frac{1}{2}$

Considérons n points $A_1, \ldots, A_n$ et ℓ une distance entre deux de ces points.

Notons N_ℓ le nombre de paires de points séparés par la distance ℓ. Alors,

$$\begin{aligned}
N_\ell &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell} = \sum_{i=1}^{n} 1.\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell}\right) \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell}\right)^2} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell}\mathbb{1}_{A_iA_k=\ell}}
\end{aligned}$$

Comme il y a au plus deux points à distance ℓ de A_j et de A_k si $j \neq k$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell} \mathbb{1}_{A_iA_k=\ell} \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} 2$$

Comme il y a au plus deux points à distance ℓ de A_j et de A_k si $j \neq k$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_iA_j=\ell} \mathbb{1}_{A_iA_k=\ell} &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} 2 \\
&\leq 2(n^2 - n).
\end{aligned}$$

Comme il y a au plus deux points à distance ℓ de A_j et de A_k si $j \neq k$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{A_iA_j=\ell}\mathbb{1}_{A_iA_k=\ell} &\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}2\\ &\leq 2(n^2-n).\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k=j}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{A_iA_j=\ell}\mathbb{1}_{A_iA_k=\ell} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{A_iA_j=\ell}\\ &\leq n^2.\end{aligned}$$

En remplaçant,

$$N_\ell \leq \sqrt{n}\sqrt{3n^2 - 2n} \leq \sqrt{3n^3}.$$

En remplaçant,

$$N_\ell \leq \sqrt{n}\sqrt{3n^2 - 2n} \leq \sqrt{3n^3}.$$

En notant D l'ensemble des distances distinctes obtenues,

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{\ell \in D} N_\ell \leq |D|\sqrt{3n^3}.$$

En remplaçant,

$$N_\ell \leq \sqrt{n}\sqrt{3n^2 - 2n} \leq \sqrt{3n^3}.$$

En notant D l'ensemble des distances distinctes obtenues,

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{\ell \in D} N_\ell \leq |D|\sqrt{3n^3}.$$

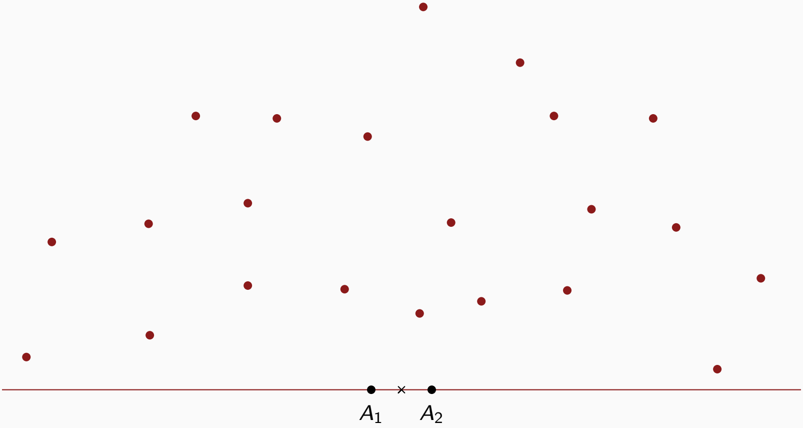
Ainsi, $g(n) \geq \frac{n(n-1)}{2\sqrt{3n^3}}$ et donc $g(n) \gg \sqrt{n}$.

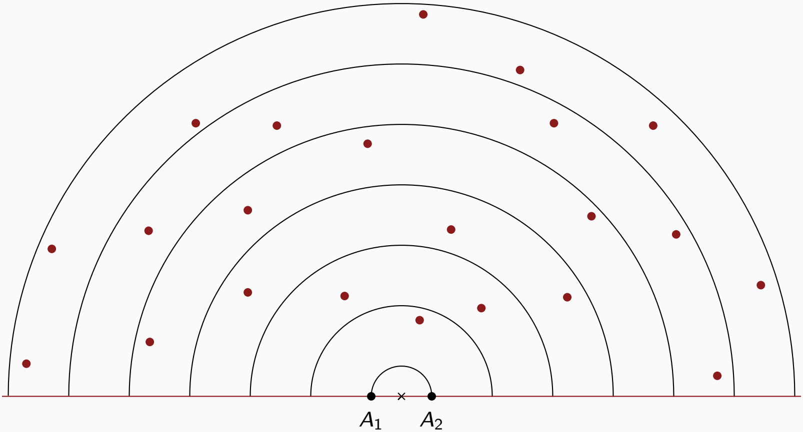
Première preuve pour $\alpha = \frac{2}{3}$

Considérons n points $A_1, \ldots, A_n$ tels que la distance minimale soit atteinte entre A_1 et A_2.

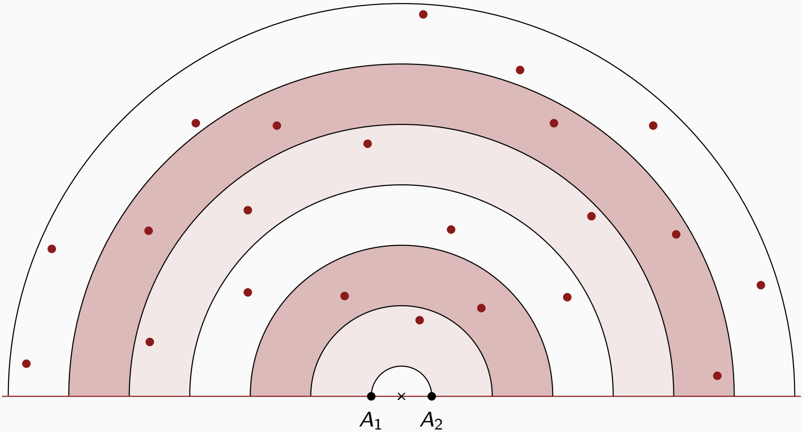
La droite (A_1A_2) sépare ce nuage de points en deux parties dont l'une contient au moins $\frac{n-2}{2}$ points. Dorénavant, on se limite à ces points.

Construisons les demi-couronnes successives centrées sur le milieu de $[A_1A_2]$ de largeur A_1A_2 qui recouvrent les points.


A_1
A_2

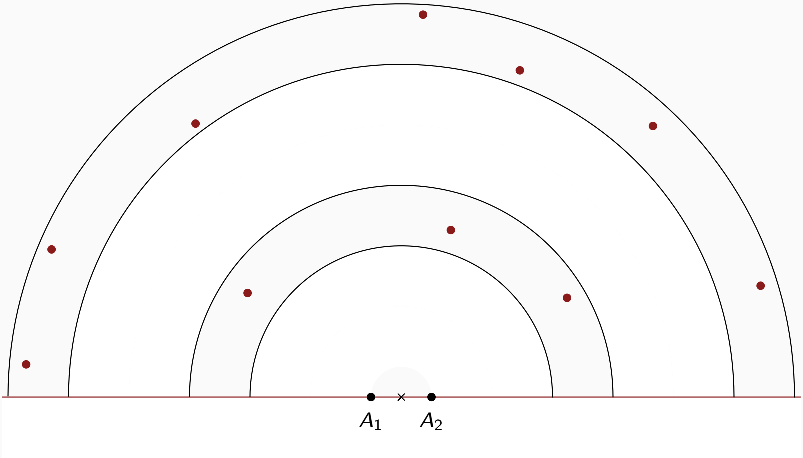


A_1
A_2


A_1
A_2

Répartissons ces demi-couronnes modulo 3 en trois ensembles. Au moins l'un de ces ensembles contient $\frac{n-2}{6}$ points. On se limite dorénavant à ces points.

Remarquons que des points appartenant à des demi-couronnes distinctes (parmi celles qui restent) ne peuvent être à la même distance de A_1 (respectivement A_2).


A_1
A_2

En reprenant, la première preuve du premier résultat, on obtient que les n_i points de la demi-couronne i définissent au moins $\sqrt{n_i}$ distances distinctes à A_1 ou A_2.

En reprenant, la première preuve du premier résultat, on obtient que les n_i points de la demi-couronne i définissent au moins $\sqrt{n_i}$ distances distinctes à A_1 ou A_2.

Ainsi, le nombre $d(n)$ de distances distinctes pour cette configuration est supérieur ou égal à (la somme porte sur les demi-couronnes choisies)

$$\sum_i \sqrt{n_i}.$$

En reprenant, la première preuve du premier résultat, on obtient que les n_i points de la demi-couronne i définissent au moins $\sqrt{n_i}$ distances distinctes à A_1 ou A_2.

Ainsi, le nombre $d(n)$ de distances distinctes pour cette configuration est supérieur ou égal à (la somme porte sur les demi-couronnes choisies)

$$\sum_i \sqrt{n_i}.$$

D'où

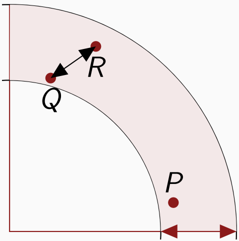
$$\frac{n-2}{6} \leq \sum_i n_i \leq \sqrt{\max n_i}.\sum_i \sqrt{n_i} \leq d(n)\sqrt{\max n_i}.$$

Considérons la demi-couronne contenant $\max n_i$ points, puis la moitié de cette couronne contenant la majorité des points (soit au moins $\frac{1}{2} \max n_i$).

Soit enfin P un point d'ordonnée minimale dans cette zone. Un rapide calcul montre que si Q et R sont équidistants de P dans cette demi-couronne alors $QR < 2A_1A_2$.

Considérons la demi-couronne contenant $\max n_i$ points, puis la moitié de cette couronne contenant la majorité des points (soit au moins $\frac{1}{2}\max n_i$).

Soit enfin P un point d'ordonnée minimale dans cette zone. Un rapide calcul montre que si Q et R sont équidistants de P dans cette demi-couronne alors $QR < 2A_1A_2$.



Il y a donc au plus deux points de la zone à la même distance de P, ce qui nous donne donc au moins $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\max n_i - 1)$ distances différentes.

D'où, $\max n_i \leq 4d(n) + 2$.

Il y a donc au plus deux points de la zone à la même distance de P, ce qui nous donne donc au moins $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\max n_i - 1)$ distances différentes.

D'où, $\max n_i \leq 4d(n) + 2$.
En reportant dans l'inégalité

$$\frac{n-2}{6} \leq d(n)\sqrt{\max n_i},$$

on obtient $d(n)^{\frac{3}{2}} \gg n$, soit $d(n) \gg n^{\frac{2}{3}}$.

En conclusion,

$$g(n) \gg n^{\frac{2}{3}}.$$

Intermède : nombre de croisements

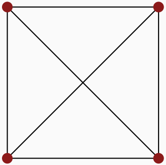
Définition

Un graphe est un couple (S, A) où S est l'ensemble des sommets et A est l'ensemble des arêtes non orientées.

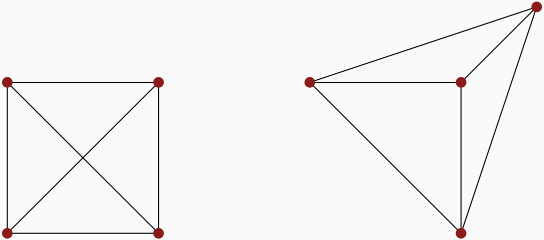
Le nombre de croisements d'un graphe est le nombre minimal de croisements entre deux arêtes dans un dessin du graphe ; si le nombre de croisements est nul, le graphe est dit planaire.

Pour un graphe planaire, les faces sont les parties du plan délimitées par un dessin sans croisement du graphe.

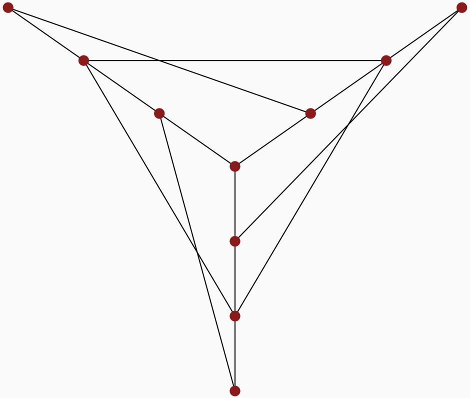
Le nombre de croisements du graphe suivant est



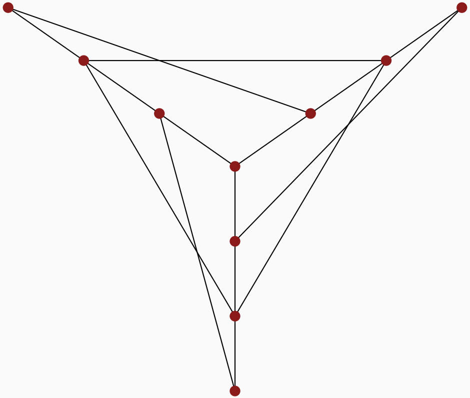
Le nombre de croisements du graphe suivant est 0. Le graphe est planaire et possède 4 faces.



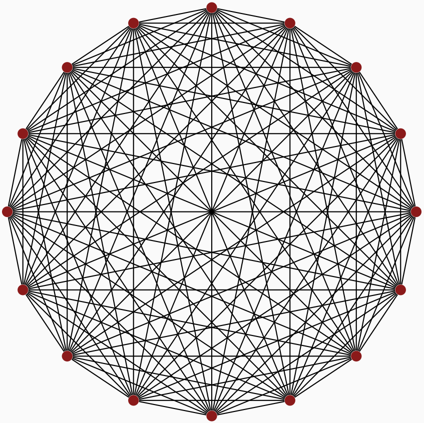
Le nombre de croisements du graphe suivant est



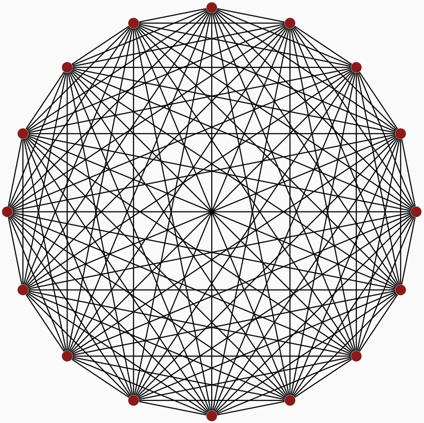
Le nombre de croisements du graphe suivant est 0.



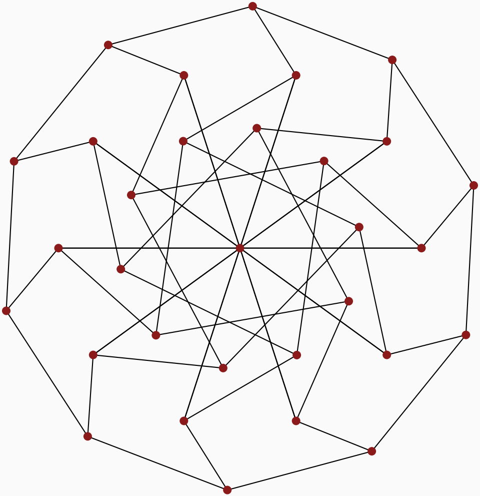
Le nombre de croisements du graphe suivant est



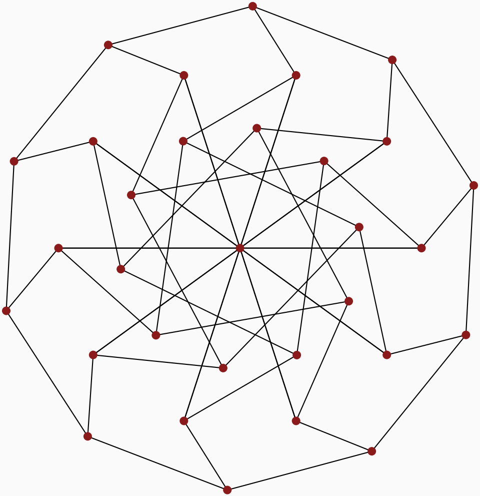
Le nombre de croisements du graphe suivant est 588(?).



Le nombre de croisements du graphe suivant est



Le nombre de croisements du graphe suivant est un exercice laissé aux spectateurs !



Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$s - a + f = 2$$

Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$s - a + f = 2$$

Preuve

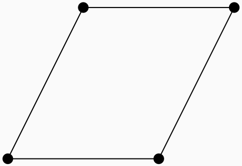
Par récurrence sur a.

Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$s - a + f = 2$$

Preuve



s

a

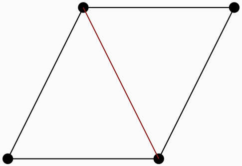
f

Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$s - a + f = 2$$

Preuve



$s \to s$

$a \to a + 1$

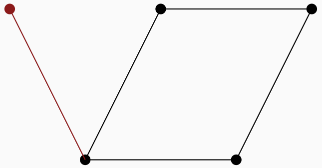
$f \to f + 1$

Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$s - a + f = 2$$

Preuve



$s \to s + 1$

$a \to a + 1$

$f \to f$

Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$3f \leq 2a.$$

Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$3f \leq 2a.$$

Preuve

Une face est délimitée par au moins 3 arêtes et une arête est le « côté » de deux faces.

Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$a \leq 3s - 6.$$

Proposition

Soit (S, A) un graphe planaire à s sommets, a arêtes et f faces. Alors,

$$a \leq 3s - 6.$$

Preuve

Il suffit de combiner les deux résultats précédents.

$$s - 2 = a - f \leq \frac{1}{3}a.$$

Proposition

Soit (S, A) un graphe à s sommets et a arêtes. Alors, le nombre de croisements c vérifie

$$c \geq a - 3s + 6.$$

Proposition

Soit (S, A) un graphe à s sommets et a arêtes. Alors, le nombre de croisements c vérifie

$$c \geq a - 3s + 6.$$

Preuve

En retirant les (au plus) c arêtes qui forment des croisements, on obtient un graphe planaire à s sommets et $a - c$ arêtes donc

$$a - c \leq 3s - 6.$$

Proposition

Soit (S, A) un graphe à s sommets et a arêtes tel que $a > 4s$. Alors, le nombre de croisements c vérifie

$$c \geq \frac{a^3}{64s^2}.$$

Proposition

Soit (S, A) un graphe à s sommets et a arêtes tel que $a > 4s$. Alors, le nombre de croisements c vérifie

$$c \geq \frac{a^3}{64s^2}.$$

Preuve

Construisons un graphe aléatoire (S', A') en choisissant chaque sommet indépendamment des autres avec probabilité p puis en ne gardant que les arêtes dont les sommets ont été choisis. Notons s', a' et c' les variables aléatoires égales au nombre de sommets, d'arêtes, de croisements de ce graphe.

Preuve

Alors, $c' \geq a' - 3s' + 6$

Preuve

Alors, $c' \geq a' - 3s'$

Preuve

Alors, $c' \geq a' - 3s'$
En passant à l'espérance,

$$\mathbb{E}(c') \geq \mathbb{E}(a') - 3\mathbb{E}(s').$$

Preuve

Alors, $c' \geq a' - 3s'$
En passant à l'espérance,

$$\mathbb{E}(c') \geq \mathbb{E}(a') - 3\mathbb{E}(s').$$

Par construction,

- $\mathbb{E}(s') = ps$

Preuve

Alors, $c' \geq a' - 3s'$
En passant à l'espérance,

$$\mathbb{E}(c') \geq \mathbb{E}(a') - 3\mathbb{E}(s').$$

Par construction,

- $\mathbb{E}(s') = ps$
- $\mathbb{E}(a') = p^2 a$

Preuve

Alors, $c' \geq a' - 3s'$
En passant à l'espérance,

$$\mathbb{E}(c') \geq \mathbb{E}(a') - 3\mathbb{E}(s').$$

Par construction,

- $\mathbb{E}(s') = ps$
- $\mathbb{E}(a') = p^2 a$
- $\mathbb{E}(c') \leq p^4 c$

Preuve

Alors, $c' \geq a' - 3s'$
En passant à l'espérance,

$$\mathbb{E}(c') \geq \mathbb{E}(a') - 3\mathbb{E}(s').$$

Par construction,

- $\mathbb{E}(s') = ps$
- $\mathbb{E}(a') = p^2 a$
- $\mathbb{E}(c') \leq p^4 c$

D'où $c \geq \frac{pa-3s}{p^3}$ et donc, pour $p = \frac{4s}{a}$,

$$c \geq \frac{a^3}{64s^2}.$$

On peut généraliser ce résultat sur les croisements à certains multi-graphes.

Proposition

Soit (S, A) un multigraphe avec s sommets, a arêtes, c croisements et tel qu'il y ait au plus M arêtes entre deux sommets quelconques. Alors,

$$c \gg \frac{a^3}{Ms^2}.$$

Deuxième preuve pour $\alpha = \frac{2}{3}$

Considérons un ensemble $\mathcal{P}$ de n points $A_1, \ldots, A_n$ définissant d distances et considérons le multigraphe dont

- les sommets sont ces points,
- les arêtes sont les arcs des cercles centrés sur un point de $\mathcal{P}$, passant par au moins 3 points de $\mathcal{P}$ et délimités par deux points de $\mathcal{P}$.

- Il y a $s = n$ sommets et $a > n(n-1) - 2nd$ arêtes.

- Il y a $s = n$ sommets et $a > n(n-1) - 2nd$ arêtes.
- Le nombre de croisements est inférieur à $2(nd)^2$.

- Il y a $s = n$ sommets et $a > n(n-1) - 2nd$ arêtes.
- Le nombre de croisements est inférieur à $2(nd)^2$.
- Il y a au plus $M = 2d$ arêtes entre deux sommets.

- Il y a $s = n$ sommets et $a > n(n-1) - 2nd$ arêtes.
- Le nombre de croisements est inférieur à $2(nd)^2$.
- Il y a au plus $M = 2d$ arêtes entre deux sommets.

L'inégalité sur le nombre de croisements d'un multigraphe donne

$$(nd)^2 \gg c \gg \frac{a^3}{Ms^2} \gg \frac{n^6}{2dn^2},$$

donc $d \gg n^{\frac{2}{3}}$.

Intermède : incidence

Considérons $\mathcal{P}$ un ensemble de n points et $\mathcal{D}$ un ensemble de m droites.
Le nombre d'incidences est l'entier

$$I = \mathrm{card}\{(A, D),\ A \in \mathcal{P},\ D \in \mathcal{D},\ A \in D\}.$$

Comment majorer correctement I en fonction de n et m ?

Proposition

$$I \ll m\sqrt{n} + n\sqrt{m}.$$

$$I = \sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D} = \sum_{A\in\mathcal{P}} 1.\left(\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\right)$$

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D} = \sum_{A\in\mathcal{P}} 1.\left(\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\right)\\
&\leq \sqrt{\sum_{A\in\mathcal{P}} 1^2}\sqrt{\sum_{A\in\mathcal{P}}\left(\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\right)^2} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D} = \sum_{A\in\mathcal{P}} 1.\left(\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\right) \\
&\le \sqrt{\sum_{A\in\mathcal{P}} 1^2}\sqrt{\sum_{A\in\mathcal{P}}\left(\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\right)^2} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{\sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{D\in\mathcal{D}}\sum_{D'\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\mathbb{1}_{A\in D'}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D} = \sum_{A\in\mathcal{P}} 1.\left(\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\right) \\
&\leq \sqrt{\sum_{A\in\mathcal{P}} 1^2}\sqrt{\sum_{A\in\mathcal{P}}\left(\sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\right)^2} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{\sum_{A\in\mathcal{P}}\sum_{D\in\mathcal{D}}\sum_{D'\in\mathcal{D}} \mathbb{1}_{A\in D}\mathbb{1}_{A\in D'}} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{\sum_{D\in\mathcal{D}}\sum_{D'\in\mathcal{D}}\sum_{A\in\mathcal{P}} \mathbb{1}_{A\in D}\mathbb{1}_{A\in D'}}
\end{aligned}
$$

On sépare alors les cas où $D = D'$ et $D \neq D'$.

$$I \leq \sqrt{n}\sqrt{}$$

On sépare alors les cas où $D = D'$ et $D \neq D'$.

$$I \leq \sqrt{n}\sqrt{nm \qquad\qquad\qquad}$$

On sépare alors les cas où $D = D'$ et $D \neq D'$.

$$I \leq \sqrt{n}\sqrt{nm + m(m-1)}$$

On sépare alors les cas où $D = D'$ et $D \neq D'$.

$$\begin{aligned} I &\leq \sqrt{n}\sqrt{nm + m(m-1)} \\ &\ll m\sqrt{n} + n\sqrt{m}. \end{aligned}$$

Avec la théorie des graphes, Szemeredi et Trotter (1983) ont montré la majoration suivante.

Proposition

$$I \ll n + m + (nm)^{\frac{2}{3}}.$$

Preuve

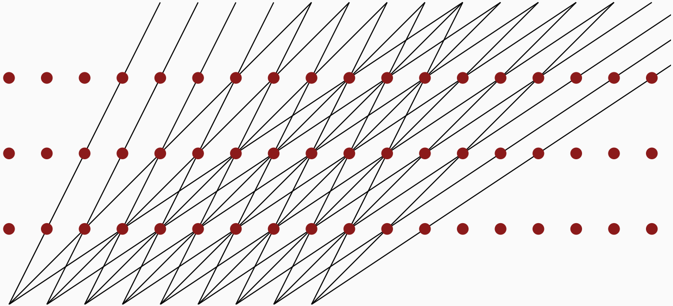
On construit un graphe dont les sommets sont les points de $\mathcal{P}$ et les arêtes sont les portions des droites de $\mathcal{D}$ joignant deux sommets. Pour ce graphe, $s = n$, $a = I - m$.

- si $a < 4s$, $I \leq m + 4n$.
- sinon,

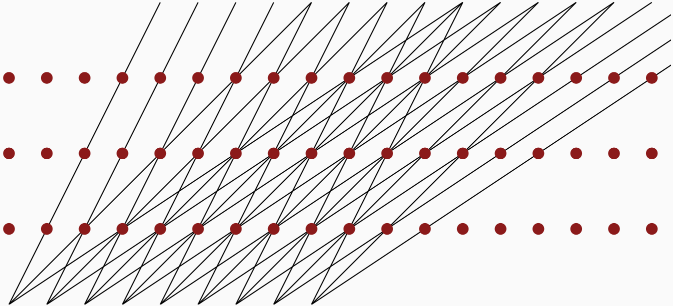
$$m^2 \geq c \geq \frac{(I-m)^3}{64n^2}$$

donc $I \leq (64n^2m^2)^{\frac{1}{3}} + m \ll (nm)^{\frac{2}{3}} + m$.

Avec les points $[\![1, 2N^2]\!] \times [\![1, N]\!]$ et les droites passant par les points $(k, 0)$ avec $k \in [\![1, N^2]\!]$ et de pente dans $[\![1, N]\!]$

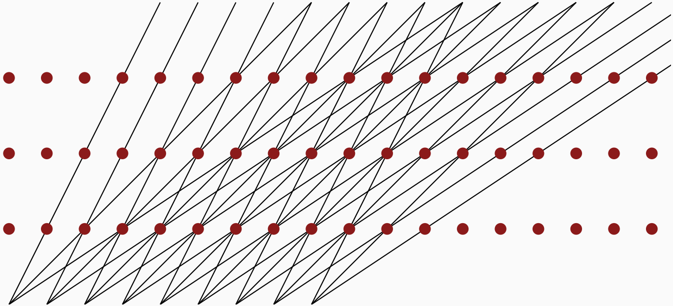


Avec les points $[\![1, 2N^2]\!] \times [\![1, N]\!]$ et les droites passant par les points $(k, 0)$ avec $k \in [\![1, N^2]\!]$ et de pente dans $[\![1, N]\!]$



$$m = 2N^3, \qquad n = N^3, \qquad n + m + (nm)^{\frac{2}{3}} \sim cN^4,$$

Avec les points $[\![1, 2N^2]\!] \times [\![1, N]\!]$ et les droites passant par les points $(k, 0)$ avec $k \in [\![1, N^2]\!]$ et de pente dans $[\![1, N]\!]$



$$m = 2N^3, \qquad n = N^3, \qquad n + m + (nm)^{\frac{2}{3}} \sim cN^4,$$

$$I = N^4.$$

Idée d'une preuve pour $\alpha = \frac{4}{5}$

Considérons un ensemble $\mathcal{P}$ de n points $A_1, \ldots, A_n$ et considérons le multigraphe dont

- les sommets sont ces points,
- les arêtes sont initialement les arcs des cercles centrés sur un point de $\mathcal{P}$, passant par au moins 3 de $\mathcal{P}$ et délimités par deux points de $\mathcal{P}$,

Idée d'une preuve pour $\alpha = \frac{4}{5}$

Considérons un ensemble $\mathcal{P}$ de n points $A_1, \ldots, A_n$ et considérons le multigraphe dont

- les sommets sont ces points,
- les arêtes sont initialement les arcs des cercles centrés sur un point de $\mathcal{P}$, passant par au moins 3 de $\mathcal{P}$ et délimités par deux points de $\mathcal{P}$,
- on a enlevé les arêtes entre deux sommets connectés au moins k fois (avec k un entier fixé de l'ordre de $\sqrt{n}$).

- On a borné le nombre d'arêtes entre deux sommets pour avoir un meilleur minorant dans l'inégalité du nombre de croisements.

- On a borné le nombre d'arêtes entre deux sommets pour avoir un meilleur minorant dans l'inégalité du nombre de croisements.
- On doit estimer le nombre d'arêtes restantes donc le nombre d'arêtes enlevées.

- On a borné le nombre d'arêtes entre deux sommets pour avoir un meilleur minorant dans l'inégalité du nombre de croisements.

- On doit estimer le nombre d'arêtes restantes donc le nombre d'arêtes enlevées.

- On remarque qu'il y a k arêtes entre deux sommets A et $B \in \mathcal{P}$ si la médiatrice de $[AB]$ contient k points de $\mathcal{P}$.

- On a borné le nombre d'arêtes entre deux sommets pour avoir un meilleur minorant dans l'inégalité du nombre de croisements.
- On doit estimer le nombre d'arêtes restantes donc le nombre d'arêtes enlevées.
- On remarque qu'il y a k arêtes entre deux sommets A et $B \in \mathcal{P}$ si la médiatrice de $[AB]$ contient k points de $\mathcal{P}$.
- On est ramené à un problème d'incidence « d'ordre k » avec l'ensemble des droites médiatrices et l'ensemble des points de $\mathcal{P}$.

- On a borné le nombre d'arêtes entre deux sommets pour avoir un meilleur minorant dans l'inégalité du nombre de croisements.
- On doit estimer le nombre d'arêtes restantes donc le nombre d'arêtes enlevées.
- On remarque qu'il y a k arêtes entre deux sommets A et $B \in \mathcal{P}$ si la médiatrice de $[AB]$ contient k points de $\mathcal{P}$.
- On est ramené à un problème d'incidence « d'ordre k » avec l'ensemble des droites médiatrices et l'ensemble des points de $\mathcal{P}$.
- On applique l'inégalité sur le nombre de croisements à ce multigraphe.

Aujourd'hui

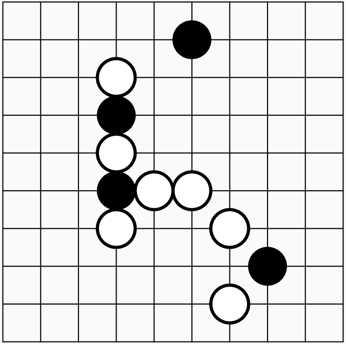
Voici le dernier résultat en date dans une prépublication de Guth-Katz en 2010.

Proposition

$$g(n) \gg \frac{n}{\ln n}.$$

- P. Erdös. **On sets of distances of n points**. The American Mathematical Monthly, 53 :248-250, 1946.
- P. Erdös. **On some metric and combinatorial geometric problems**. Discrete Mathematics, 60 :147-153, 1986.
- L. Moser. **On the different distances determined by n points**. The American Mathematical Monthly, 59 :85-91, 1952.
- L. Székely. **Crossing numbers and hard Erdös problems in discrete geometry**. Combinatorics, Probability and Computing, 11 :1-10, 1993.
- L. Guth, N. H. Katz. **On the Erdös distinct distance problem on the plane**. ArXiV 2010.
- J. Garibaldi, A. Iosevich, S. Senger. **The Erdös Distance Problem**. Student Mathematical Library, AMS. 2010.

Merci à tous !



Addendum (après l'exposé)

- Erdös a établi dans l'article de 1946 la majoration.

Proposition

$$g(n) \ll \frac{n}{\sqrt{\ln n}}.$$

Addendum (après l'exposé)

▷ Dans cet exposé, on a choisi d'être délibérément flou sur la notion de dessin de graphe (les arêtes sont-elles des segments ou des courbes) et ce flou entraîne une incertitude sur le nombre de croisements ; dans le cas où l'on impose que les arêtes sont des segments le nombre de croisements du graphe complet à 16 sommets est 603 et non 588.